

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PROPOSTA METODOLÓGICA PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DAS FUNÇÕES DEFINIDAS POR VÁRIAS SENTENÇAS

*PROBLEM SOLVING AS A METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR THE
MEANINGFUL LEARNING OF THE FUNCTIONS DEFINED BY SEVERAL
SENTENCES*

Ricardo GONÇALVES¹
Norma Suely Gomes ALLEVATO²

Resumo

O presente trabalho refere-se ao Produto Educacional resultante de uma pesquisa de mestrado profissional desenvolvida com o objetivo de elaborar e aplicar uma proposta didática na tentativa de verificar quais contribuições a metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas promove frente ao conteúdo das funções definidas por várias sentenças aliado a uma aprendizagem significativa. Para o desenvolvimento da pesquisa, adotamos a metodologia qualitativa, e os métodos empregados foram a pesquisa participante e a análise documental. Contou com a participação dos alunos do segundo ano do Ensino Médio em uma escola particular da cidade de Ourinhos/SP. Os dados coletados foram gravados em áudio e vídeo, fotografados, documentados e as descrições das atividades foram registradas em diário de bordo. A partir da aplicação da proposta aliada às orientações de documentos oficiais e aos fundamentos da metodologia de Resolução de Problemas, encontramos indicadores da aprendizagem significativa proposta por David Ausubel, os quais serão explicitados no presente trabalho. Também percebemos que a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem favorece a investigação matemática e promove um ambiente colaborativo entre alunos e professores possibilitando maior autonomia na resolução de problemas e aprendizagem de conceitos e conteúdos matemáticos.

¹Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo/SP. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (UNICSUL), São Paulo/SP. Atua como professor de Matemática no nível médio e superior. ri_gaia@hotmail.com.

²Doutora em Educação Matemática pela Universidade Júlio Mesquita Filho (UNESP), Rio Claro/SP. Docente e pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL) São Paulo/SP. normallev@gmail.com.

Palavras-chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Aprendizagem Significativa; Funções Definidas por Várias Sentenças.

Abstract

The present work refers to the Educational Product resulting from a professional master's research developed with the objective of elaborating and applying a didactic proposal in the attempt to verify which contributions the methodology of teaching and learning through Problem Solving promotes to the content of the functions defined by several sentences allied to a meaningful learning. For the development of the research, we adopted the qualitative research methodology, and the methods used were participatory research and documentary analysis. It counted with the participation of the second-year high school students in a private school in the city of Ourinhos / SP. The collected data were recorded in audio and video, photographed, documented and the descriptions of the activities were registered in a logbook. From the application of the proposal allied to the guidelines of official curricular documents and to the fundamentals of the Problem Solving methodology, we find indicators of the meaningful learning proposed by David Ausubel, which will be clarified in the present work. It was also noticed that Problem Solving as teaching and learning methodology favors mathematical investigation and promotes a collaborative environment between students and teachers, allowing greater autonomy in problem learning mathematical concepts and contents.

Keywords: Mathematics Education; Problem Solving; Meaningful Learning, Functions Defined for Multiple Sentences.

Introdução

Este produto educacional foi constituído a partir de uma pesquisa de mestrado profissional cuja dissertação foi intitulada “Resolução de Problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças³”, defendida em 2015 por Ricardo Gonçalves, sob a orientação da Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato. O objetivo da pesquisa foi analisar como se realiza a aprendizagem das funções definidas por várias sentenças através da Resolução de Problemas e, a partir disso, construir uma proposta de atividades envolvendo problemas que podem ser desenvolvidos à luz dessa metodologia de ensino (GONÇALVES, 2015a, 2015b). Parte dessa proposta está apresentada no presente texto.

Na tentativa de verificarmos quais contribuições a metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas promove na aprendizagem sobre funções definidas por várias sentenças, envolvemos quinze alunos do segundo ano

³ Disponível em: https://www.cruzeirodosul.edu.br/wp-content/uploads/2016/06/PE_RicardoGon%C3%A7alves-2015-Vpublicada.pdf

do Ensino Médio, de uma escola particular da cidade de Ourinhos/SP, trabalhando com a resolução de nove problemas que foram desenvolvidos e trabalhados em cinco encontros. Vale destacar que esses alunos não haviam estudado as funções definidas por várias sentenças antes da aplicação da proposta didática. No entanto, no momento do desenvolvimento da pesquisa, já haviam sido abordadas, individualmente, as funções afim, quadrática, modular, exponencial e logaritma. (GONÇALVES, 2015a).

A metodologia de pesquisa teve abordagem qualitativa, em que o pesquisador, também professor da turma, manteve contato direto com o grupo de alunos pesquisado. Os dados foram gravados em áudio e vídeo, fotografados e documentados, e as descrições foram registradas em diário de campo.

Assim, neste produto educacional, oferecemos uma proposta para o trabalho docente e discente com funções de várias sentenças que, por meio da metodologia de ensino e aprendizagem através da resolução de problemas, busca promover uma aprendizagem significativa apresentando e discutindo as potencialidades desse conteúdo e, em particular, de diversos tipos de funções nele envolvidos.

Este material é destinado a professores de Matemática, alunos de licenciatura em Matemática e pesquisadores da área que têm como objetivo compreender e apresentar aos seus alunos o trabalho com funções definidas por várias sentenças lançando mão de uma metodologia de ensino e aprendizagem mais atual, favorecendo a contextualização e a investigação matemática frente a um trabalho mais colaborativo.

Entendemos que a Matemática desempenha um papel de grande importância no currículo escolar e no desenvolvimento de várias habilidades e competências, promovendo a formação do cidadão e a capacidade de pensar matematicamente. Consideramos que é preciso compreender como o conhecimento matemático é construído e se amplia durante a vida escolar dos estudantes, e qual é o papel do professor como organizador e condutor das atividades nas aulas de Matemática em busca de uma aprendizagem significativa. O presente produto pretende contribuir para essas reflexões e compreensões.

1 Resolução de Problemas e Aprendizagem Significativa

Nesta seção apresentaremos a abordagem teórica acerca da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem, e alguns elementos importantes que constituem a aprendizagem significativa.

Problemas e Resolução de Problemas são expressões abrangentes e podem significar diversas coisas, dependendo do contexto em que cada indivíduo está inserido. Para este trabalho, apresentamos algumas ideias acerca do que é um Problema e da Resolução de Problemas numa perspectiva metodológica de ensino e de aprendizagem da Matemática, que pode ser proposta e implementada no currículo escolar.

Defendendo que o ensino de Matemática deve ser realizado, entre outros aspectos, com o objetivo de valorizar as habilidades de resolver problemas do cotidiano, pessoais, científicos ou matemáticos, Dante (2005, p. 8) propõe que “aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática”. E completa que, certamente, outros objetivos para o ensino da Matemática devem ser atingidos, enquanto se busca desenvolver a competência em resolução de problemas.

Van de Walle (2009) reforça que problema é qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não têm regras prescritas ou em que não haja métodos particulares ou pré-determinados para a sua resolução.

Para Allevato e Onuchic (2011), problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer, ou seja, é uma atividade ou situação em que a forma de resolução não é conhecida ou memorizada pelos estudantes de antemão.

Dentre algumas concepções acerca da Resolução de Problemas, a adotada neste trabalho é a de ensinar através da Resolução de Problemas. É uma metodologia de ensino e aprendizagem na qual o conhecimento matemático se constrói ou se amplia através da resolução de um problema gerador, que é proposto com vistas à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento ao longo de sua resolução.

Para Van de Walle (2009), a metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas apoia-se na orientação de que:

Ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas é mais centrado no aluno do que no professor. O ensino começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem – seus conhecimentos prévios. É um processo que requer confiança nas crianças – uma

convicção de que todas elas podem criar ideias significativas sobre a matemática (VAN DE WALLE, 2009, p. 58).

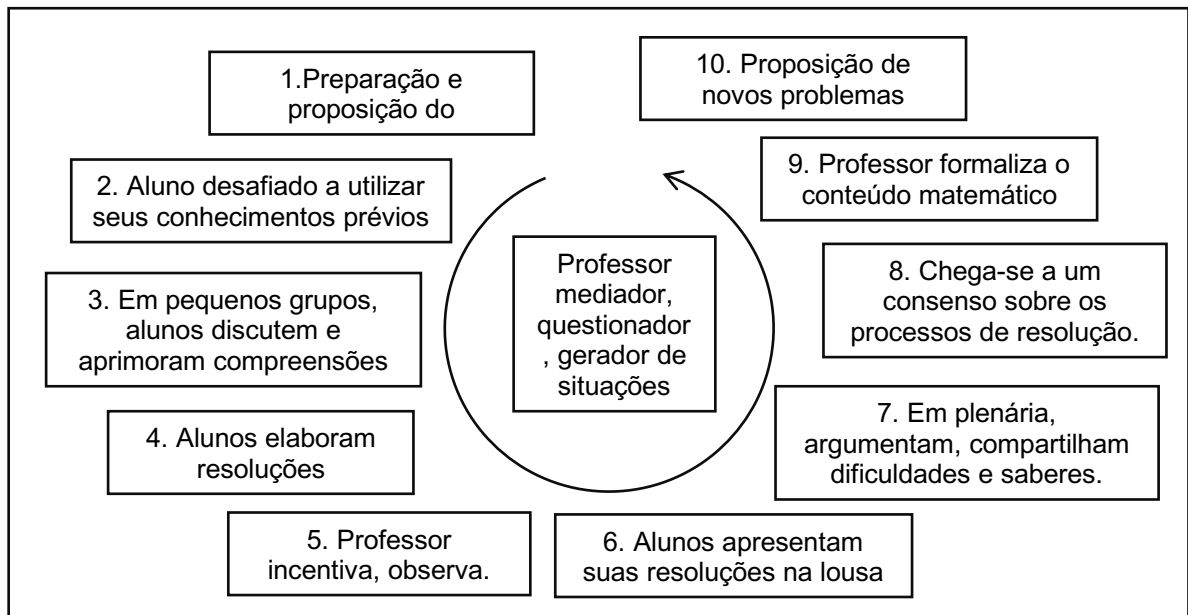
Essa ideia proposta por Van de Walle (2009) remete aos fundamentos da Teoria da Aprendizagem Significativa, de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), na qual um dos elementos para que a aprendizagem seja significativa é que o professor conheça “onde o aluno está” para ancorar a nova informação aos conhecimentos prévios da estrutura cognitiva de cada estudante. Para os autores, a essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias “são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal)” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 34). Relação não arbitrária e relação substantiva são dois conceitos básicos que caracterizam a aprendizagem significativa; por isso, a seguir, apresentaremos com mais detalhes cada uma delas.

A não arbitrariedade indica que não é com qualquer conhecimento prévio que o novo conhecimento vai interagir, ou seja, o relacionamento de uma nova informação deve ocorrer com os conhecimentos relevantes presentes na estrutura cognitiva do aprendiz, não de qualquer modo.

A substantividade significa, por outro lado, que o que é essencial na nova informação é que deve ser interiorizada pela estrutura cognitiva, não apenas os símbolos específicos usados para expressá-la (MOREIRA, 1997).

Buscando compreender como o aluno pode relacionar de forma não arbitrária e substantiva o novo material à sua estrutura cognitiva com base nos conhecimentos já adquiridos, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) denominam subsunçores esses conhecimentos que já estão presentes na estrutura cognitiva do estudante. Assim, eles consideram importante que o professor conheça o que o aluno já sabe para ancorar as novas informações a esses subsunçores já presentes em sua estrutura cognitiva.

Consideramos que essas ideias estão bastante aliadas ao desenvolvimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem, conforme propõem Allevato e Onuchic (2014), que sugerem dez etapas para sua organização e desenvolvimento:

Figura 1: A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

Fonte: Allevato, 2014

Na etapa 1, de Preparação do Problema, o professor seleciona ou elabora ou aceita um problema proposto por um aluno. Ele será o “problema gerador” da construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento que o professor planejou para aquela aula. Então deve ser realizada a Leitura individual do problema, pelo aluno – etapa 2, para que ele tenha contato com a linguagem matemática e desenvolva sua própria compreensão do problema proposto. Então, na etapa 3, os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. O professor pode ajudar na compreensão do problema pelos grupos, mas deve cuidar para que os alunos, nessa fase, exercitem a expressão de ideias e aprimorem a linguagem, expressando-se com clareza, coerência e fazendo-se entender. Então, os grupos elaboram uma Resolução para o problema (etapa 4), de modo que, ao longo da resolução, os alunos serão levados à construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. Os alunos, então aprimoram a expressão escrita, pois precisarão da linguagem matemática. Se necessário, poderão empregar outros recursos de que dispõem ou que dominam: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas. Mas é primordial que o registro escrito da resolução seja realizado. Durante todo esse processo, o professor deve sempre Observar e Incentivar – etapa 5. Mediando o trabalho dos grupos, incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e as técnicas operatórias já conhecidas, e à troca de ideias; e auxilia em suas dificuldades sem fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos. Na etapa 6 - Registro das resoluções na lousa -

algumas resoluções dos grupos são registradas na lousa (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Nesse compartilhamento constitui-se uma oportunidade importante para aprimorar a apresentação (escrita) da resolução para mostrar aos colegas. A partir disso, em Plenária (etapa 7), os alunos, com a mediação do professor, observam comparam e discutem com respeito as diferentes resoluções apresentadas, defendem seus pontos de vista e esclarecem. O objetivo é que a classe chegue a um consenso (etapa 8) sobre o resultado correto, momento em que ocorre aperfeiçoamento da leitura e escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo. Na etapa 9 – Formalização do conteúdo – o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática –, de conceitos, princípios e procedimentos matemáticos relacionados ao problema; destaca técnicas operatórias e apresenta, se for o caso, demonstrações de resultados relativos ao conteúdo. Essa etapa, que tem o professor como centro das atenções e detentor do conhecimento, irá proporcionar aos alunos o contato com a correção e o rigor do tratamento matemático e mais construção de conhecimento. Finalmente, na etapa 10, ocorre a Proposição e resolução de novos problemas, com o objetivo de consolidar as aprendizagens construídas e, possivelmente, reiniciar o processo rumo à construção de novos conhecimentos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Essas etapas buscam subsidiar os envolvidos no trabalho com a Resolução de Problemas, pois orientam alunos e professores a desenvolverem atividades que possam potencializar a aprendizagem de conteúdos matemáticos, bem como promover uma aprendizagem mais significativa em um ambiente colaborativo e reflexivo.

Buscando aliar essa metodologia de ensino às ideias acerca da aprendizagem significativa, utilizando as funções definidas por várias sentenças como conteúdo matemático, encontramos nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio PCN+ que

[...] a riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas (BRASIL, 2002, p. 121).

Nesse documento há a recomendação de que os problemas não devem ser trabalhados no final do ensino de funções, mas devem ser motivo e contexto para o aluno aprender esse conteúdo, ou seja, tais contextos aliados à metodologia de ensino através da Resolução de Problemas permitem fazer do problema uma ferramenta para aprender Matemática.

Nessa perspectiva, o trabalho com funções definidas por várias sentenças exerce um papel relevante no ensino e na aprendizagem desse conteúdo, pois permite trabalhar com diversos tipos de funções tais como: as funções afim, quadrática, exponencial e modular. Também favorece a resolução de problemas em diversos contextos, aproximando a Matemática da realidade dos alunos e de outras disciplinas do currículo escolar.

Outro aspecto relevante para o trabalho com funções é a sua aplicação e a possibilidade de utilização de várias representações em diversas áreas do conhecimento. Os conceitos sobre funções permitem o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas numérica, algébrica e graficamente, desenvolvendo o espírito de investigação que, segundo os PCN+ é indicado como um objetivo a ser atingido no ensino de Matemática (BRASIL, 2002).

2 Alguns encaminhamentos metodológicos e a construção dos dados

A metodologia adotada em nossa pesquisa foi qualitativa. Assim, foi possível considerar os diferentes pontos de vista dos integrantes do grupo estudado, promovendo discussões abertas a fim de melhor compreender diversas situações, revelando que a Resolução de Problemas favorece o ensino e a aprendizagem de conteúdos do currículo escolar potencializando as relações entre o professor-pesquisador e os alunos do grupo pesquisado.

Um dos métodos adotados em nossa pesquisa foi a pesquisa participante, de modo que o professor-pesquisador participou efetivamente do ambiente estudado, organizando os encontros, promovendo interações e discussões entre os alunos, bem como mediando a dinâmica das atividades de resolução de problemas desenvolvidas durante a coleta de dados (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Os dados coletados foram gravados em áudio e vídeo, fotografados e documentados, as descrições das atividades registradas em diário de campo e todas as resoluções desenvolvidas pelos alunos foram recolhidas para análise, o que configura o método de análise documental (CORSETTI, 2006).

3 Resultados e Discussão do Produto Educacional

O presente produto educacional⁴ tem por objetivo apresentar ao professor sugestões de problemas que podem ser trabalhados à luz da metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, seguindo as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2014) e buscando uma aprendizagem significativa em um ambiente escolar mais colaborativo e reflexivo.

3.1 O Problema 1

O problema que iremos apresentar nesta seção foi adaptado do livro Matemática Completa, 1ª série, de Giovanni e Bonjorno (2005). Foi desenvolvido em nossa pesquisa (GONÇALVES, 2015a), nos permitindo perceber elementos interessantes que vão ao encontro de uma proposta mais atual quanto ao ensino e aprendizagem da Matemática.

A partir do gráfico de uma função definida por várias sentenças, elaboramos algumas questões que contemplassem a proposta de ensino e aprendizagem de funções segundo os documentos oficiais, a metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, bem como a aprendizagem significativa.

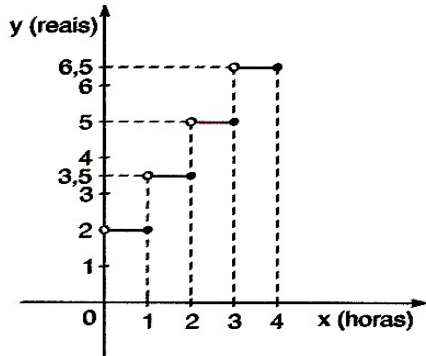
Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1999)⁵ as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática que estão presentes nesse problema são:

- Produzir textos matemáticos adequados.
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

⁴De acordo com o Documento de Área 2016, para a área de Ensino, os produtos educacionais são materiais produzidos, geralmente, nos Mestrados Profissionais para uso em escolas públicas do país, e podem inserir-se nas “seguintes categorias: mídias educacionais; protótipos educacionais e materiais para atividades experimentais; propostas de ensino; material textual; materiais interativos; atividades de extensão edesenvolvimento de aplicativos” (CAPES, 2016, p. 14). O apresentado no presente artigo constitui-se em produto educacional do tipo proposta de ensino.

⁵A BNCC para o Ensino Médio ainda se encontra em processo de elaboração.

Problema 01: No gráfico abaixo o eixo das abscissas representa o tempo em horas, e o eixo das ordenadas os valores em reais. Observe o gráfico abaixo e, em seguida, faça o que se pede:



- a) Elabore uma situação que possa ser representada pelo gráfico acima.
- b) Elabore duas perguntas e as respostas de acordo com a situação que você elaborou no item a.
- c) É possível encontrar a lei de formação da função representada nesse gráfico? Se sim, apresente-a. Se não, justifique sua resposta.

d) Complete a tabela

x	y
2,5	
	3,5

Explique o que significam os valores que você indicou em cada linha da tabela em relação à situação que você elaborou no item a.

e) Que outra situação poderia ser elaborada ou expressa por uma função com comportamento semelhante ao da função representada no gráfico acima? Escreva detalhadamente essa situação.

f) Assinale a denominação do gráfico apresentado acima.

- () Gráfico de uma função de retas.
- () Gráfico de uma função maior inteiro.
- () Gráfico de uma função de várias sentenças.
- () Gráfico de uma função infinita.

Agora, justifique a alternativa que você escolheu.

3.1.1 Características presentes no item a

Percebe-se, nesse item, que se trata de um problema aberto. Entendemos como pesquisa aberta as ações promovidas por aqueles problemas em cujo enunciado não há uma estratégia específica para resolvê-los. A resolução de problemas abertos exige, do resolvidor, formas mais elaboradas de raciocínio. Eles

possuem várias respostas corretas ou vários métodos para obter a resposta; portanto, são aqueles em que a situação inicial ou o processo de resolução ou o objetivo final (ou ambos) permitem que o resolvidor faça escolhas.

A esse gráfico pode-se relacionar uma situação prática, por exemplo, de um estacionamento rotativo. Na primeira hora o valor pago será R\$ 2,00, ou seja, do momento em que o veículo foi estacionado até uma hora, o valor pago será R\$ 2,00. A partir de uma hora até 2 horas que o veículo ficou estacionado, devem ser pagos R\$ 3,50, ou seja, acrescenta-se R\$1,50 por uma hora excedente. Assim, sucessivamente, o gráfico poderia ser a representação da cobrança de um estacionamento, em que a primeira hora custa R\$ 2,00 e às horas subsequentes, a partir da primeira, acrescentam-se R\$1,50 por hora excedente. O gráfico também pode retratar outras situações como, por exemplo, a cobrança em jogos de boliche.

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio PCN+ (BRASIL, 2002), é destacado que

[...] a riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas.

Além disso, Van de Walle (2009) aponta cinco representações acerca do trabalho com funções: o próprio padrão concreto, a que podemos nos referir como o contexto; representações por tabelas de funções; equação simbólica; representações gráficas de funções e linguagem de expressão para funções. No caso desse item está em foco a *representação gráfica*. A situação elaborada pelo aluno é importante porque o contexto dá sentido ao gráfico e o gráfico acrescenta maior compreensão ao contexto. O gráfico é uma imagem que reforça as conexões entre a tabela, o padrão e os valores que constituem uma determinada função.

3.1.2 Características presentes no item b

Tem-se, nesse item, uma associação com o item a, pois também se refere a uma questão envolvendo uma pesquisa aberta. Porém, entre as cinco representações acerca do trabalho com funções propostas por Van de Walle (2009), esse item contempla a *linguagem de expressão para funções*: as relações funcionais são regras de correspondência dependentes; é importante utilizar uma linguagem que confirme

a relação de dependência entre as variáveis que compõem a função fazendo uso, por exemplo, do termo “é uma função de”.

Pode-se, nesse item, apontar questões como: Qual o valor a ser pago pelo proprietário de um veículo que deixou o carro estacionado por 4 horas? Qual seria o tempo de permanência de um veículo quando o proprietário pagou para o estacionamento a quantia de R\$ 8,00? Seria possível o proprietário de um veículo pagar R\$ 1,00 por deixar o veículo nesse estacionamento? Justifique sua resposta.

Essas e muitas outras questões podem aparecer no desenvolvimento desse item, pois levam em conta os múltiplos saberes dos alunos, bem como o contexto em que cada aluno está inserido, suas relações com o mundo e seu pensamento matemático.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), deve-se solicitar questões de dissertação, que são questões mais desafiadoras do que as questões de respostas curtas. Essas questões podem ser usadas para testar a capacidade do aluno para organizar ideias, construir argumentos coerentes, avaliar as ideias criticamente e se expressar de modo claro e convincente. Esse recurso também oferece maior escopo para um pensamento original e independente, e permite perceber nos alunos seus estilos cognitivos, sensibilidades, problemas e estratégias de Resolução de Problemas.

Outro elemento destacado por esses autores e se faz presente nesse item b é o fato de propor aos estudantes uma tarefa de aprendizagem, sequencialmente dependente de outra, ou seja, que não pode ser executada sem um verdadeiro domínio da precedente; esse procedimento ajuda o professor a verificar se houve ou não a aprendizagem significativa.

3.1.3 Características presentes no item c.

Dentre as cinco representações acerca do trabalho com funções, propostas por Van de Walle (2009), nesse item temos a *equação simbólica*: consiste em expressar uma função como uma equação, de modo que ela possa ser examinada em sua forma mais abstrata. Essa forma de representação promove a compreensão das propriedades da função que podem ser aplicadas ao contexto do problema, bem como facilita o cálculo dos valores da função.

Esse item aborda problemas de processo ou heurísticos: esse tipo de problema tem como objetivo levar o aluno a pensar e elaborar um plano de ação, uma estratégia para a resolução do problema.

Para responder essa questão o aluno deve mobilizar seus conhecimentos prévios sobre, por exemplo: função constante, intervalos e representações algébricas de funções. Na tentativa de resolver o problema, ele precisará fazer uma reflexão e recorrer aos conhecimentos presentes na sua estrutura cognitiva, tentando ancorar o novo conhecimento de forma clara e legítima.

A compreensão correta do gráfico pode sugerir a seguinte resposta:

$$f(x) = \begin{cases} 2,0, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 3,5, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 65, & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 65, & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Todas essas ações a serem realizadas pelos alunos vão ao encontro do que é proposto por Van de Walle (2009). O autor considera que a Resolução de Problemas desenvolve o “potencial matemático” dos estudantes, e que, como metodologia de ensino e aprendizagem, é considerada um processo de fazer Matemática, raciocinar (argumentar), comunicar, conectar e representar.

3.1.4 Características presentes no item d

Nesse item verificamos que está presente a *representação por tabelas de funções*: a tabela pode servir como um apoio para facilitar a generalização de uma fórmula que expresse a função.

Atividades baseadas na Resolução de Problemas fornecem diversos caminhos para chegar à solução, o que possibilita, a cada estudante, dar sentido, bem como ampliar suas ideias, ouvir e discutir as ideias de outro aluno ou suas próprias ideias com os colegas.

A partir da observação e compreensão do gráfico o aluno pode chegar à seguinte solução:

x	y
2,5	5
$2,0 < x \leq 3,5$	3,5

A partir do gráfico e da tabela pode-se estabelecer relações entre grandezas, trabalhar com os conceitos de domínio e imagem, os intervalos do domínio e a representação por meio de tabelas a partir de um problema prático envolvendo o gráfico de uma função. O aluno é convidado a investigar o comportamento do gráfico e os valores que ele expressa para transcrever esses valores em uma tabela. Ou seja, as ações investigativas decorrentes de situações-problema promovem reflexões que direcionam os alunos a redimensionassem o conhecimento que já possuem, sendo protagonistas do processo de ensino e aprendizagem.

3.1.5 Características presentes no item e

Tem-se, nesse item, mais uma questão aberta, pois não há uma resposta que envolva a memorização ou um procedimento algorítmico pré-estabelecido para resolvê-lo.

E, novamente, está contemplada uma das cinco representações acerca do trabalho com funções, propostas por Van de Walle (2009): *o próprio padrão concreto*, a que se pode referir como contexto. Essa função começa com um contexto e, embora nem toda função possua relação com um contexto do mundo real, é importante apresentar funções que façam sentido aos estudantes.

Em nossa pesquisa (GONÇALVES, 2015a), uma das duplas apresentou como uma possível situação com comportamento semelhante ao da função representada no gráfico, o “aluguel de bicicletas em cidade de praia”, pois, segundo relato da dupla, o aluguel por uma hora custa, por exemplo, R\$ 4,00 e as demais horas custam R\$ 2,00 por hora. Essa situação, de fato, poderia ser expressa por uma função de várias sentenças, semelhante à que foi representada no gráfico do problema dado.

Essa ideia foi desencadeada pela investigação e reflexão sobre o comportamento do gráfico. Quanto ao pensamento reflexivo dos estudantes, Van de Walle (2009, p. 49) afirma que é importante “envolvê-los em problemas que os favorecem a usar suas ideias enquanto procuram soluções e criam novas ideias nesse processo”. Para o autor, o pensamento reflexivo não favorece apenas as respostas, mas as explicações e justificativas para o desenvolvimento da resolução de um determinado problema, o que pode ser explorado e avaliado durante uma plenária entre os alunos e o professor.

Além disso, esse item vai ao encontro do que é sugerido por Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Moreira (1999 apud BORSSOI, 2013); segundo esses autores

devemos solicitar aos alunos que diferenciem ideias relacionadas, mas não idênticas, ou que identifiquem os elementos essenciais de um conceito ou proposição.

3.1.6 Características presentes no item f

Essa questão como último item pretende verificar se o aluno, após a resolução dos itens anteriores, consegue fazer uso das definições e nomenclaturas matemáticas, pois para Van de Walle (2009) a Resolução de Problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais e ajudar os alunos a terem bom desempenho. Esse item está associado ao ensino-aprendizagem-avaliação, segundo Allevato e Onuchic (2014). As autoras utilizam essa palavra composta para expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, uma vez que, a avaliação é desenvolvida e integrada durante o ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas. Nessa perspectiva, a Resolução de Problemas possibilita que, enquanto os alunos discutem ideias, usam modelos interativos, refletem sobre a solução dos problemas e apresentam as resoluções, eles fornecem um fluxo permanente de informações que permitem ao professor fazer interações, questionamentos e avaliar e aprimorar o processo de ensino e aprendizagem.

A correta resposta ao item, gráfico de uma função de várias sentenças, mostra que o aluno compreendeu o comportamento da função, bem como sabe fazer uso correto da linguagem matemática.

3.2 Reflexões sobre a implementação

Essas atividades promovem um ambiente colaborativo de aprendizagem a partir e através da resolução do problema proposto. Segundo Torres (2004), esse tipo de ambiente favorece:

[...] participação ativa do aluno no processo de aprendizagem; mediação da aprendizagem feita por professores e tutores; construção coletiva do conhecimento, que emerge da troca entre pares, das atividades práticas dos alunos, de suas reflexões, de seus debates e questionamentos; interatividade entre os diversos atores que atuam no processo; estimulação dos processos de expressão e comunicação; flexibilização dos papéis no processo das comunicações e das relações a fim de permitir a construção coletiva do saber; sistematização do planejamento, do desenvolvimento e da avaliação das atividades; aceitação das diversidades e diferenças entre alunos; desenvolvimento da autonomia do aluno no processo

ensino-aprendizagem; valorização da liberdade com responsabilidade; comprometimento com a autoria; valorização do processo e não do produto. (TORRES, 2004, p. 50).

Cada um desses itens deve promover reflexões, debates e troca de ideias entre os alunos, e entre o professor e os alunos, num processo colaborativo de construir conhecimento. Desenvolvidas assim, o ambiente colaborativo promove uma integração relevante entre os alunos, que, motivados também por essa interação, constroem ou reativam técnicas e conceitos que servirão como alicerce para aprender novos conteúdos através da Resolução de Problemas.

Para a condução da metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas com vistas à aprendizagem significativa e que favoreça um ambiente colaborativo, é interessante que o professor fique atento às orientações sugeridas por Allevato e Onuchic (2014), que fornecem subsídios para o professor potencializar as atividades pedagógicas em sala de aula.

A escolha do problema gerador é uma etapa fundamental para o desenvolvimento do trabalho através da Resolução de Problemas; o professor pode aceitar o problema sugerido pelos alunos ou propor problemas a eles.

A proposição do problema é uma atividade relevante em sala de aula, pois a partir da resolução do problema gerador é possível, dentre vários fatores, construir ou reconstruir o conceito de função usando relações entre duas grandezas, analisar e interpretar diversos tipos de gráficos relacionando-os à sua função, resolver problemas envolvendo funções, compreender tabelas que representam diversas situações, construir e analisar leis de formação de função, promovendo a contextualização e a compreensão dos problemas envolvendo funções definidas por várias sentenças.

Após essa etapa, os alunos devem tentar resolver o problema apenas com os conhecimentos prévios, sem interação com o professor ou com outros alunos. Durante essa resolução individual, sugerimos que o professor estipule um tempo para a resolução do problema; em nossa pesquisa foram destinados 25 minutos para essa etapa.

Em seguida os alunos, juntamente com o professor releem o problema, discutem o que fizeram individualmente e, agora em duplas ou trios, aprimoram a resolução do problema. O professor, como mediador do conhecimento, busca constantemente incentivar e fornecer dicas necessárias para que as duplas (ou trios)

se sintam motivadas para resolver o problema e para aprender novos conteúdos matemáticos que estão incorporados naquele problema.

As resoluções individuais e as dos grupos devem ser registradas por escrito e entregues ao professor; tais resoluções podem mostrar a ocorrência de aprendizagem, bem como fornecer elementos importantes para a próxima etapa: a plenária e a busca de consenso.

Alguns alunos são convidados a registrarem algumas resoluções na lousa. O momento da plenária e a busca do consenso promovem situações em que os alunos são convidados a refletirem sobre suas resoluções, propondo resoluções mais coerentes do que já haviam desenvolvido. Em nossa pesquisa observamos que esse problema que apresentamos neste produto educacional foi desafiador, despertando nos alunos a vontade de compreendê-lo e possibilitando estabelecer relações das funções de várias sentenças em diversos contextos.

Na etapa que consiste na busca pelo consenso, é fundamental que o professor tenha domínio do conteúdo matemático, e que, a partir das resoluções apresentadas pelos alunos, promova a reflexão sobre as resoluções dos alunos com a intenção de introduzir novos conceitos e ideias matemáticas e de promover uma aprendizagem significativa.

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), amostras de trabalhos incluem experiências de campo, habilidades de laboratório, desempenho clínico, desenhos, exposição de temas, relatórios, pesquisas, uso de ferramentas, entre outros. São instrumentos de avaliação que possibilitam a percepção de traços como flexibilidade, engenhosidade, perseverança e criatividade, elementos que aparecem durante a plenária e a busca do consenso.

O papel do professor, nesse momento da aula, é bastante importante: deve incentivar o pensamento reflexivo promovendo um ambiente colaborativo entre os envolvidos no ambiente escolar, bem como valorizar os esforços dos alunos.

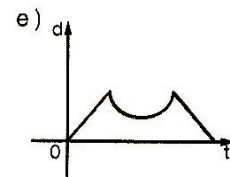
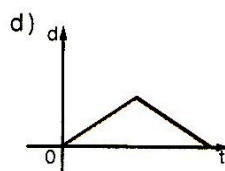
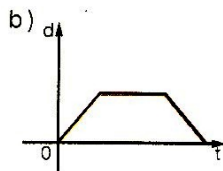
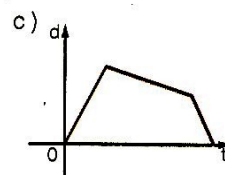
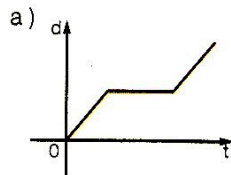
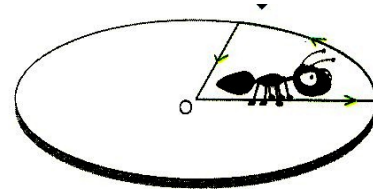
3.3 Mais Problemas

Para contribuirmos com o ensino e a aprendizagem das funções definidas por várias sentenças deixamos mais três problemas, a seguir, que podem ser desenvolvidos utilizando a metodologia de ensino através da Resolução de Problemas. Esses problemas foram desenvolvidos na pesquisa que deu origem a este produto educacional e de modo que as discussões mais detalhadas sobre cada um

deles (como fizemos no Problema 1) podem ser encontradas na dissertação de Gonçalves (2015a).

Problema 02:

(OBMEP) Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura. Qual dos gráficos a seguir representa a distância d da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo t ?

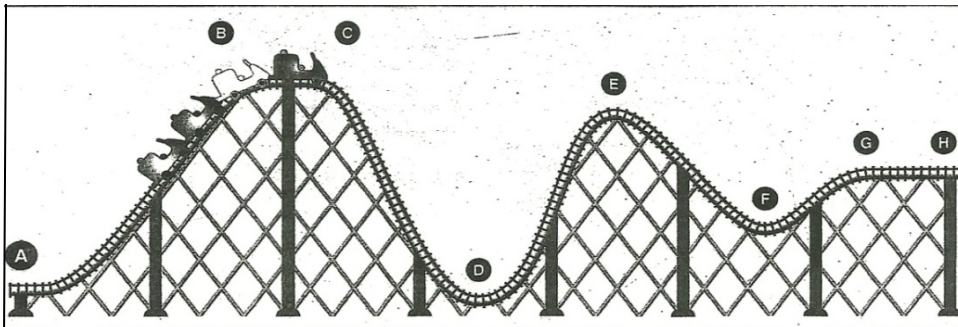


Ilustrações: Acervo da editora

- 1) Explique, detalhadamente, a alternativa que você escolheu.
 - 2) Explique, detalhadamente, porque você não escolheu as outras quatro alternativas
- Adaptado de Souza (2010).

Problema 03:

Observe a figura da montanha russa abaixo e, em seguida, faça o que se pede:



Decorrem 120 segundos para correr toda essa montanha russa. Pede-se:

- a) Como os pontos A a H devem ser espaçados ao longo da linha de tempo?
- b) Esboce um gráfico da altura do carro como uma função do tempo.
- c) Esboce o gráfico da velocidade como uma função do tempo.
- d) Como seria o gráfico dos “gritos em decibéis”? Qual a variável independente nesse gráfico? Porque voce considerou essa variável?
- e) Você consegue esboçar o gráfico dos “gritos em decibéis” considerando uma variável independente diferente da que foi considerada no item d? Qual seria essa variável? E como seria o gráfico?

Adaptado de Van de Walle (2009).

Problema 04:

É um fato conhecido que, qualquer que seja a substância, a sua temperatura permanece constante durante a fusão. No processo de aquecimento de certa substância, sua temperatura T (em °C) variou com o tempo t (em minutos) de acordo com a seguinte lei:

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 5t, & \text{se } 0 \leq t \leq 30 \\ 170, & \text{se } 30 \leq t \leq 50 \\ 20 + 3t, & \text{se } t \geq 50 \end{cases}$$

- Esboce o gráfico de T como função de t .
- Qual é a temperatura da substância no início do processo? Explique como você encontrou essa resposta.
- Qual é a temperatura da substância decorridas 3 horas do início do processo? Explique como você encontrou essa resposta.
- Sabendo-se que houve fusão da substância, em qual intervalo de tempo ela ocorreu? Justifique sua resposta.
- Em que intervalo de tempo houve a maior variação da temperatura por minutos? Explique sua resposta.
- Qual o domínio da função $T(t)$?
- O que você entende sobre o significado da terceira sentença que compõe essa função? Explique.

Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2005).

Considerações finais

O trabalho com funções definidas por várias sentenças através da Resolução de Problemas pode promover avanços relevantes no ensino e na aprendizagem desse conteúdo, pois permite trabalhar com problemas em diversos contextos, aproximando a Matemática da realidade dos alunos e de outras disciplinas do currículo escolar.

Outro aspecto relevante para o trabalho com funções é a sua diversidade de representações e suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento. Além disso, os conceitos sobre funções permitem o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algebricamente e graficamente, desenvolvendo o espírito de investigação que, segundo os PCN+, é indicado como um objetivo a ser atingido pelo ensino de Matemática (BRASIL, 2002, p.121).

Percebemos que o trabalho com a Resolução de Problemas como uma metodologia pode contribuir para melhorar as atividades de ensino e de aprendizagem da Matemática, sobretudo quando desenvolvida seguindo as orientações de ensino

através da Resolução de Problemas, embora essa metodologia não deva ser entendida como a única ferramenta eficaz.

É preciso diversificar os modos de ensinar e aprender Matemática, possivelmente, até, mantendo algumas atividades de caráter tradicional, que também contribuem para o desenvolvimento e a compreensão de conteúdos matemáticos, uma vez que muitos alunos já estão habituados a elas. Nessa perspectiva, o professor deve utilizar diferentes recursos metodológicos, seja a Resolução de Problemas, a Modelagem matemática ou outros.

Além disso, foi possível observar, na pesquisa que realizamos, que a Resolução de Problemas precisa ir além das atividades individuais, buscando promover, dentre outros aspectos, um ambiente de interação entre alunos e professor, para que as resoluções desenvolvidas pelos estudantes sejam analisadas e refletidas em um ambiente colaborativo em que o aluno fique à vontade para expor suas ideias e compreender alguns fenômenos e resoluções de outros grupos de alunos ou mesmo do próprio professor.

Dentre alguns aspectos relevantes propostos por Van de Walle (2009), ficou evidente em nossa pesquisa o fato de que a Resolução de Problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas. Quando os alunos estão resolvendo problemas eles refletem sobre os elementos, conceitos e outros aspectos daqueles problemas; assim as ideias emergentes se integram com as já existentes, havendo uma melhor compreensão das novas ideias envolvidas naqueles problemas fortalecendo a aprendizagem significativa pelos alunos.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, 3. **Apresentação em mesa redonda**. 2014, Rio Claro.

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**. Rio Claro, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: Onuchic, L. R. et al. (Org.) **Resolução de Problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial.2014. p. 35-52.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J.D. e HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana. Tradução para português, de Eva Nick et al., da segunda edição de Educational psychology: a cognitive view. (1980).

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretária de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999. Disponível em:<portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> Acesso em: 10 jul. 2018.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. 144 p.

CAPES. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior. Diretoria de Avaliação. **Documento de área** – Ensino. Brasília: CAPES, 2016. 62 p.

CORSETTI, B. A análise documental no contexto da metodologia qualitativa: uma abordagem a partir da experiência de pesquisa do programa de pós graduação em educação da UNISINOS. **UNIREVISTA**, v.1, n.1, p. 32-46, 2006.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12.ed. São Paulo: Editora Ática, 2000.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa**. 2.ed. volume 1. São Paulo: editora FTD, 2005.

GONÇALVES, R. **Resolução de Problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças**. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015a.

GONÇALVES, R.; ALLEVATO, N. S. G. **Resolução de Problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças**. Produto Educacional. 2015b. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2017. Disponível em:<https://www.cruzeirodosul.edu.br/wp-content/uploads/2016/06/PE_RicardoGon%C3%A7alves-2015-Vpublicada.pdf>. Acesso: 09 dez. 2018.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar Matemática**. 1.ed. volume 1. São Paulo: editora FTD, 2010.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem Significativa: um conceito subjacente. Encontro Internacional sobre Aprendizaje Significativo. **Actas...** Burgos, Espanha. Servicio de Publicaciones de La Universidad de Burgos, 1997, p. 19-44.

TORRES, P. L. **Laboratório on-line de aprendizagem**: uma proposta crítica de aprendizagem colaborativa para a educação. Tubarão: Ed. Unisul, 2004.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**. 6. edição. Artmed, 2009.

Recebido em: 01/08/2018

Aprovado em: 05/12/2018