



Edição Especial

VII Simpósio de Licenciaturas em Ciências Exatas e em Computação
Universidade Federal do Paraná – Pontal do Paraná (PR), 2025

MANIFESTAÇÕES DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL EM UMA TAREFA PAUTADA NA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

MANIFESTATIONS OF PROPORTIONAL REASONING OF ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS IN A TASK BASED ON THE THEORY OF DIDACTICAL SITUATIONS

Camila Cassoli¹
Bárbara Cândido Braz²

Resumo

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de conclusão de curso que teve como foco o desenvolvimento do raciocínio proporcional por meio de atividades orientadas pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Guy Brousseau. Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa, cujo objetivo é analisar o desenvolvimento do raciocínio proporcional de educandos de um sétimo ano do Ensino Fundamental, ao desenvolverem uma atividade pautada na TSD. A partir disso, buscou-se responder à seguinte questão norteadora: que elementos associados ao desenvolvimento do raciocínio proporcional emergem em uma atividade matemática pautada na TSD? A atividade analisada neste trabalho foi desenvolvida em uma turma do sétimo ano de uma escola pública localizada no norte do Paraná e os dados foram analisados à luz da TSD bem como das teorias que sustentam o raciocínio proporcional. Os resultados apontaram que a atividade desenvolvida favoreceu a manifestação de indícios do raciocínio proporcional dos estudantes, principalmente durante as dialéticas de formulação e validação, nas quais os estudantes precisaram elaborar estratégias,

¹ Universidade Estadual de Maringá (UEM). Mestra em Educação Matemática.

² Universidade Federal do Paraná (UFPR). Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática.

REPPE: Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino

Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procopio (PR), v. 9, n. 2, p. 258-277, 2025

ISSN: 2526-9542



testar hipóteses e construir justificativas, revelando um processo dinâmico e significativo de aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Pensamento proporcional; Ensino Fundamental; Razão e Proporção.

Abstract

This article presents a segment of a final undergraduate research project that investigated the development of proportional reasoning through activities grounded in the Theory of Didactical Situations (TDS), proposed by Guy Brousseau. The study adopts a qualitative approach and aims to analyze how seventh-grade students in elementary school develop proportional reasoning when engaged in a task structured within the TDS framework. From this perspective, the guiding research question was: which elements related to the development of proportional reasoning emerge in a mathematical activity designed according to TDS principles? The activity examined in this study was implemented with a seventh-grade class in a public school located in northern Paraná, and the data were analyzed both through the lens of TDS and theories that underpin proportional reasoning. The findings suggest that the activity fostered the emergence of evidence of students' proportional reasoning, particularly during the dialectics of formulation and validation, where students were required to devise strategies, test hypotheses, and construct justifications, thereby revealing a dynamic and meaningful process of mathematical learning.

Keywords: Proportional reasoning; Elementary Education; Ratio and Proportion.

Introdução

Este artigo corresponde a uma versão revisada e ampliada do trabalho apresentado no evento científico denominado 'VII SLEC'. Ademais, resulta de uma pesquisa desenvolvida no âmbito de um Trabalho de Conclusão de Curso - defendido no Curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, escrito pela primeira autora e orientado pela segunda autora - cujo objetivo foi analisar o desenvolvimento do raciocínio proporcional de educandos do Ensino Fundamental, ao desenvolverem atividades embasadas na Teoria das Situações Didáticas, doravante TSD. Para alcançarmos o objetivo da pesquisa, duas atividades que envolvem os conceitos de razão e de proporção – conceitos estes intrínsecos ao desenvolvimento do raciocínio proporcional – foram desenvolvidas com uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública situada na região norte do Paraná. Neste texto optamos por apresentar e discutir a primeira atividade desenvolvida com os estudantes, que tinha como objetivo abordar o conceito de razão entre duas medidas. Neste âmbito, busca-se responder a seguinte questão: “que

elementos associados ao desenvolvimento do raciocínio proporcional emergem em uma atividade matemática pautada na TSD?”.

Para investigar os elementos que fundamentam o desenvolvimento do raciocínio proporcional nos pautamos nos estudos de Behr, Lesh e Post (1998), Lamon (2012) e Cyrino *et al.*, (2014). Ao mesmo tempo, para o planejamento e desenvolvimento da tarefa matemática potencialmente significativa para abordar os conceitos matemáticos citados, nos fundamentamos na TSD, proposta e sistematizada por Brousseau (1986).

O interesse por desenvolver a investigação aqui relatada é justificado pela insipiência de pesquisas que tratam do desenvolvimento do raciocínio proporcional por meio da TSD. Um levantamento na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) na ocasião do desenvolvimento da pesquisa e mais recentemente, em junho de 2025, indicou a publicação de 32 pesquisas que tratam do raciocínio proporcional no âmbito do Ensino Fundamental. Ao mesmo tempo, nenhuma dessas pesquisas aliam as temáticas “raciocínio proporcional”, “Teoria das situações didáticas” e “Ensino Fundamental”, como propusemos nesta investigação.

No mesmo contexto, o interesse por analisar o desenvolvimento do pensamento proporcional neste nível de ensino, veio de argumentações como as de Behr, Lesh e Post (1998), que afirmam ser esse raciocínio o ápice dos alunos na escola primária e o suporte para a continuação dos estudos em Matemática. Neste âmbito, a TSD revela-se potencialmente significativa em termos de aporte didático, na medida em que permite o desenho de um ambiente de aprendizagem, denominado de *milieu*, que considera as relações entre professor, aluno e saber, na sistematização de conceitos matemáticos específicos.

Considerando estes apontamentos, esta pesquisa foi realizada com duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental, pertencentes a uma escola da rede pública estadual localizada em um município do norte do estado do Paraná. A escolha da instituição escolar fundamentou-se pela parceria previamente estabelecida com a Universidade Federal do Paraná (UFPR), por meio de projetos de extensão universitária e de estágios supervisionados obrigatórios.

As análises empreendidas evidenciaram que a atividade proposta favoreceu a manifestação de conceitos relacionados ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, em determinadas etapas do desenvolvimento da TSD, a saber: institucionalização e validação. Isso porque, foram nesses momentos que os grupos

puderam expor para a turma as suas estratégias – delineadas na Dialética ação e na Dialética formulação – e justificar aos demais alunos os motivos de sua escolha.

Teoria das Situações Didáticas

Para compreender essa teoria, é importante se ater aos significados atribuídos para os termos "situação" e "didática". O termo "situação" refere-se à interação estabelecida entre o indivíduo e o ambiente ao seu redor, ou seja, estabelece uma relação entre todos os elementos que participam do processo de ensino-aprendizagem. No que se refere ao termo "didática", este está relacionado com as ideias de ensinar, instruir, explicar e demonstrar. Nesse sentido, a didática pode ser compreendida como a arte de ensinar, envolvendo práticas que visam a facilitação da aprendizagem e a sistematização do conhecimento no processo educativo. Diante disso,

(...) identificamos como situações Matemáticas todas aquelas que levam o aluno a uma atividade Matemática sem intervenção do professor. Reservamos o termo situações didáticas para os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno (Brousseau, 1986, p. 21).

Estas ideias são fundamentais na sistematização da TSD, de Guy Brousseau. Este pesquisador propôs algumas situações para entender a relação da tríade professor, aluno e saber no processo de ensino-aprendizagem. No âmago dessa teoria, situa-se o *milieu*, um conceito que auxilia na análise das relações existentes em sala de aula, ou seja, é o meio no qual o professor, o aluno e o saber se relacionam. Diante disso, "o meio é uma variável pensada e organizada pelo professor com intenções de provocar desequilíbrios cognitivos, afim de que possa ocorrer a aprendizagem à medida que o aluno vai adaptando-se ao meio" (Litz Lamblém; Bittar, 2018, p. 207). Para essas autoras, para que essa adaptação ocorra é importante que o aluno realize um processo de reflexão e de tomada de decisões, para organizar as ideias e desenvolver estratégias com base em conhecimentos já adquiridos ou construídos no contexto em que foram inseridos.

A expectativa da Teoria das Situações Didáticas (TSD) é que os alunos apresentem devolutivas por meio do *milieu* organizado pelo professor. Dessa forma, o estudante deve sentir-se instigado pela atividade proposta, encarando-a tanto como

um desafio pessoal quanto como uma oportunidade de elaborar conjecturas e validá-las (Litz Lamblém; Bittar, 2018). Deste modo, o saber a ser ensinado é consequência da adaptação do estudante ao *milieu*, mediante a busca por respostas que entre desequilíbrios e contradições, provocam a sistematização de conceitos matemáticos e, daí, a aprendizagem.

De acordo com De Sousa e Alves (2024, p. 14) o estímulo a aprendizagem ocorre em momentos que podem ser chamados de dialéticas “que não necessariamente ocorrem de modo disjunto, mas que culminam na construção do conhecimento pelo aluno de forma autônoma.” Tais dialéticas são denominadas por Brousseau (1986), como: Dialética da ação, Dialética da formulação, Dialética da validação e Dialética da institucionalização. As três primeiras Dialéticas compõem a fase adidática, que para Brousseau (2008) é o momento em que o aluno interage com a situação proposta, sem a intervenção do professor, ou seja, a intenção de ensinar é pensada pelo professor, mas não é revelada ao aluno. “Partindo deste ponto, vale destacar que as situações adidáticas são elaboradas para que coexistam com as situações didáticas, caracterizando e obedecendo a um processo didático pré-determinado por objetivos, métodos, recursos e conceitos” (Sousa; Alves; Souza, 2023, p. 292). Sintetizamos as dialéticas a seguir de acordo com os pressupostos de Brousseau (1986).

A primeira é denominada Dialética da ação. Esta Dialética se caracteriza pelo momento em que o aluno é inserido em uma situação-problema e aceita o desafio proposto pelo professor. A partir disso, mobiliza conhecimentos que já fazem parte do seu repertório para formular hipóteses iniciais, ainda desvinculadas de teorias matemáticas. Assim, o aluno não consegue justificar suas respostas, uma vez que suas ações não estão, necessariamente, fundamentadas teoricamente. Nessa perspectiva, o papel do professor é criar condições que favoreçam a interação do aluno com o meio, mediando o processo por meio de questionamentos estratégicos para exploração do problema.

Na Dialética de formulação, ocorrem os indícios de possíveis teorias que podem ser utilizadas nas estratégias de resolução do problema, com um raciocínio um pouco mais elaborado que na fase anterior. A partir disso, ocorre a troca de informações verbais e escritas entre os alunos. É nesse momento, que o aluno começa a se apropriar do conhecimento. O papel do professor é de “proporcionar ao

aluno condições para que ele construa gradativamente uma linguagem compreensível por todos envolvidos” (Cassoli, 2019, p. 41).

A Dialética de validação, por sua vez, consiste na justificação das soluções com fontes teóricas consistentes, a partir de argumentações que atribuam veracidade ao conhecimento construído por meio do problema. Nesse momento ocorre a validação do que foi desenvolvido nas Dialéticas anteriores. Portanto essa Dialética “busca o debate das afirmações descobertas pelos alunos, ou seja, das afirmações que foram formuladas na situação ação e formulação, isso permite a organização das interações com o *milieu*” (Cassoli, 2019, p. 42).

Por fim, na Dialética de institucionalização, o aluno busca atribuir ao conhecimento um caráter mais objetivo e generalizável, extrapolando a situação inicial proposta e tentando aplicá-lo em novos contextos. Trata-se da fase em que o saber construído passa a ser compreendido como parte de um corpo de conhecimento histórico e científico. Uma vez validado, esse saber é institucionalizado pelo professor, integrando o conjunto de conhecimentos reconhecidos e compartilhados coletivamente na turma.

É importante destacar que as dialéticas não seguem um caminho, necessariamente, linear: os alunos podem retornar as etapas anteriores sempre que necessário. Por exemplo, na Dialética de validação, se não houver uma justificativa teórica coerente, é comum voltar à Dialética de ação ou formulação para rever o problema e propor novas hipóteses. Esse movimento evidencia a natureza dinâmica da aprendizagem matemática.

Ao analisar as dialéticas/situações didáticas na perspectiva de Brousseau (2002, 2008), tem-se que o momento em que o estudante constrói o conhecimento ocorre na situação adidática, que compreende as três primeiras dialéticas da TSD, sendo esta elaborada para que o aluno interaja com um ambiente sem a intervenção docente. Já a institucionalização, mostra-se como parte integrante da transformação do conhecimento – simples familiaridade, mas não intimidade com o objeto de estudo – em saber – intelectual, que admite conceitos e juízos à respeito –, por meio do processo de devolução, que ocorre ao longo de toda a situação didática (Sousa; Alves, Souza, 2023, p. 293).

Conforme a citação anterior, compreende-se que, no desenvolvimento da TSD, particularmente na fase adidática, manifestam-se características que contribuem para a construção do raciocínio proporcional dos estudantes. Entre essas

características, destacam-se: a criação de um espaço de aprendizagem planejado e organizado para favorecer a exploração e a construção ativa do conhecimento; a transição de um contexto ou situação matemática específica para um meio de referência mais abstrato e generalizável, que possibilita a análise do problema; e a combinação entre orientação adequada e autonomia para a elaboração de estratégias.

No contexto desta pesquisa, buscamos, então, constituir um *milieu* para que o conceito de razão entre duas medidas pudesse ser institucionalizado em uma turma de sétimo ano. Considerando que o conceito citado é necessário e faz parte do desenvolvimento do raciocínio proporcional, nas próximas páginas apresentamos a concepção que ampara nossa investigação.

Desenvolvimento do Raciocínio Proporcional

O raciocínio proporcional é contemplado em diversos documentos curriculares, tais como a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1997, 1998) e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica para a disciplina de Matemática do Estado do Paraná (Paraná, 2008). Esses documentos ressaltam tanto a necessidade quanto a relevância de promover o desenvolvimento do raciocínio proporcional, considerando sua aplicação dentro e fora do ambiente escolar. Diante disso, considera-se um elemento importante no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos no Ensino Fundamental. Segundo Behr, Lesh e Post (1998), esse tipo de raciocínio representa uma base essencial para a compreensão de conteúdos mais avançados ao longo da trajetória escolar.

(...) o raciocínio proporcional não deve ser tomado como um sinônimo de proporcionalidade, mas como uma condição necessária para que os indivíduos sejam capazes de compreender contextos e aplicações Matemáticas que envolvam proporção/ proporcionalidade (Lamon, 2012 apud Cyrino *et al.*, 2014, p. 48).

Para Lamon (2012), algumas estruturas matemáticas auxiliam na promoção de ideias e conceitos que favorecem o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Dentre essas estruturas, a fração se destaca como elemento introdutório para diferentes conceitos matemáticos, como a construção do conceito de número racional.

Essa abordagem aponta para uma compreensão da proporcionalidade como um conceito que emerge a partir dos diferentes significados atribuídos às representações fracionárias (Cyrino *et al.*, 2014).

A ideia de proporcionalidade está relacionada a um dos diferentes significados que podem ser produzidos para o registro fracionário $\frac{a}{b}$ a razão. Matematicamente a proporcionalidade é descrita por uma igualdade entre duas razões como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; com b e d diferentes de zero (...) (Cyrino *et al.*, 2014, p.47).

Partindo dos diferentes conceitos que são possíveis de se trabalhar, Lamon (2012), apresenta quatro elementos que podem indicar a mobilização do raciocínio proporcional, sendo: medida/medição e o raciocínio relativo; quantidades e covariação; processos de unitização e raciocínio progressivo e regressivo e; partilha (divisão equitativa) e comparação.

O critério de medida/medição e o raciocínio relativo “está presente na constituição do conhecimento da representação fracionária dos números racionais e consequentemente está na base do desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional” (Cyrino *et al.*, 2014, p. 52). Os entendimentos dos significados relacionados a medições estão atrelados a três princípios: 1) Princípio da compensação: quanto menor for a fração de uma unidade, maior será o número de partes necessárias para representar uma determinada quantidade; 2) Princípio da aproximação: uma medida nunca representa um valor exato, sendo sempre uma estimativa; 3) Princípio da partição sucessiva: é possível dividir uma unidade em partes iguais e menores repetidamente, quantas vezes for necessário, com o objetivo de obter uma medida mais precisa. Esses princípios mostram que a medição está diretamente relacionada com o raciocínio relativo, que leva a percepção de variações de medidas e grandezas diferentes. Por exemplo: “a diferença entre a altura inicial de uma planta e a altura final resulta em uma medida numérica ou linear que pode ser determinada em metros, centímetros, milímetros essa variação é caracterizada como absoluta” (Cassoli, 2019, p. 34).

O critério de Quantidades e covariação corresponde a habilidade de reconhecer quantidades e suas variações quando estão relacionadas, por exemplo: estimar grandezas, verificar quais sofrem variações, identificar como ocorre essa variação (diretamente ou inversamente proporcional, multiplicativo).

No que se refere ao critério de Processos de unitização e raciocínio progressivo e regressivo, a autora Lamon (2012) afirma que esses elementos estão relacionados entre si. A unitização consiste no processo de reorganizar as grandezas envolvidas, isto é, de reagrupá-las de modo que os novos agrupamentos mantenham a quantidade total representada inicialmente. Esse processo envolve o uso de raciocínio progressivo e regressivo, sendo um procedimento mental que, a partir de uma fração, estabelece relações proporcionais equivalentes à unidade de referência. Com isso, torna-se possível identificar proporções correspondentes para outras frações dessa mesma unidade.

Por fim, o critério de Partilha (divisão equitativa) e comparação consiste em dividir uma unidade, discreta ou contínua, em partes iguais e finitas, sem sobreposição entre elas. “Esse procedimento associado à comparação permite que sejam estabelecidas relações entre as partes e entre as partes e o todo, procedimentos frequentemente utilizados na escrita do registro fracionário” (Coutinho; Tortola, 2020, 73). Além disso, relaciona-se ao conceito de medição, especialmente ao princípio da partição recursiva, que permite subdividir uma unidade em porções menores e iguais.

Esses cinco critérios foram utilizados para analisar os indícios do raciocínio proporcional dos alunos que participaram da atividade analisada.

Procedimentos metodológicos

A atividade que foi analisada no decorrer deste trabalho é uma adaptação de uma atividade de Modelagem Matemática pautada nos pressupostos teóricos de Blum (2006) e como objetivo abordar o conceito de razão entre duas medidas e igualdade de razões. Para contextualizar a proposta, os estudantes receberam impressa uma notícia jornalística fictícia relatando o sequestro de um filhote de cachorro, cuja única pista disponível para encontrar o ladrão era o tamanho da pegada deixada pelo suspeito. Com base nesse cenário, foi formulado o seguinte problema: como identificar o responsável pelo sequestro conhecendo apenas a medida de sua pegada?

A partir dessa problemática, os alunos passaram a levantar hipóteses e registrá-las em um documento impresso entregue pelos pesquisadores, com o intuito de solucionar o problema de forma organizada. Em grupos, começaram a refletir sobre quais outras características poderiam ser identificadas a partir do tamanho da pegada,

de modo a ampliar as evidências e, assim, possibilitar a identificação do possível autor do sequestro. Ao final da atividade, cada grupo apresentou a estratégia adotada para resolver o problema no quadro. Em seguida, foi realizada a institucionalização dos conceitos matemáticos envolvidos, com destaque para a razão entre medidas e a igualdade de frações, os quais foram sistematizados coletivamente no quadro, com o auxílio das professoras.

A situação descrita foi implementada em duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental - 7A e 7B - de uma escola da rede estadual da região Norte do Paraná. Cada turma tinha 39 alunos, na qual foi possível organizá-los em nove grupos de quatro alunos e um grupo de três alunos. A escolha dessa instituição de ensino se deu pela parceria já existente com a Universidade Federal do Paraná (UFPR), estabelecida por meio de projetos de extensão e estágios supervisionados. Nesse contexto, uma estudante do curso de Licenciatura em Ciências Exatas, com habilitação em Matemática, realizava estágio obrigatório nas referidas turmas, o que viabilizou sua participação no desenvolvimento das atividades da pesquisa. Ao todo, cinco docentes estiveram envolvidos na condução da atividade: a professora-pesquisadora, a estagiária (Professora 1), a professora orientadora do estágio (Professora 2), uma professora colaboradora (Professora 3) e o professor regente da turma (Professor 4).

A coleta de dados foi realizada por meio dos registros das falas dos estudantes e dos registros escritos produzidos pelos alunos durante a atividade. Para documentar as discussões, foram utilizados gravadores de áudio, os quais permitiram uma análise mais detalhada do desenvolvimento dos estudantes, evidenciando também as negociações e argumentações construídas coletivamente ao longo da tarefa. A análise foi pautada na TSD e nas teorias que embasam o desenvolvimento do raciocínio proporcional, como já mencionado anteriormente.

Além disso, foram considerados somente os registros dos alunos que participaram de todas as etapas do desenvolvimento da atividade. A partir desses registros, foram escolhidos os que apresentaram diferentes estratégias para resolver as atividades, com a finalidade de investigar a pluralidade dos conceitos matemáticos utilizados para resolver a tarefa proposta.

Portanto a presente pesquisa, possui um caráter qualitativo, uma vez, que busca analisar o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos educandos do sétimo ano do Ensino Fundamental, ao desenvolverem uma atividade embasada na Teoria

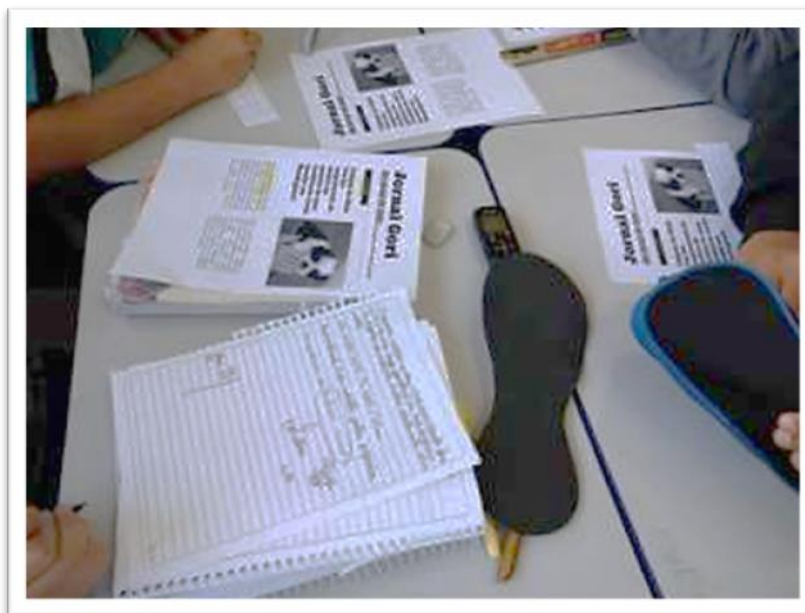
das Situações Didáticas, não priorizando dados numéricos, mas sim o processo como um todo de uma forma descritiva (Santos, 2009).

O desenvolvimento de conceitos sobre raciocínio proporcional de estudantes de sétimo ano do Ensino fundamental

A análise dos dados foi estruturada em quatro etapas, de acordo com as Dialéticas propostas por Brousseau (1986), sendo: 1) Dialética da ação; 2) Dialética da formulação; 3) Dialética da validação; e 4) Dialética da institucionalização. Em cada uma dessas etapas, buscou-se evidenciar os critérios indicativos do desenvolvimento do raciocínio proporcional propostos por Lamon (2012) e Cyrino *et al.*, (2014) tais como: noções de medida e medição, raciocínio relativo, compreensão de quantidades e covariação, processos de unitização, raciocínio progressivo e regressivo, além de estratégias de partilha (divisão equitativa) e comparação. Embora as Dialéticas não ocorram de forma linear no processo didático, optamos por apresentá-las na sequência mencionada, com o objetivo de organizar e sistematizar as análises.

De acordo com Brousseau (1986), na Dialética da ação é fundamental que os alunos sejam convidados a participar ativamente da situação proposta, engajando-se na formulação de hipóteses aleatórias na tentativa de resolver o problema. Nesse sentido, o ponto de partida da atividade consistiu em desafiar os estudantes a colaborar com uma investigação policial fictícia, cujo objetivo era identificar o sequestrador de um filhote de cachorro, a partir da única pista disponível: a pegada deixada pelo suposto autor do crime. Para viabilizar a exploração da situação, foram entregues aos alunos moldes de pegadas confeccionados em EVA com 28 cm de comprimento, correspondendo ao tamanho real de um pé humano, representando, assim, a dimensão do pé do meliante, como mostra a Figura 1.

Figura 1: Os materiais entregues para o desenvolvimento da atividade



Fonte: Cassoli (2019, p. 46)

Durante a atividade, os grupos começaram a investigar quais características do suspeito poderiam ser inferidas a partir do tamanho do pé do molde dado. Por meio da mediação docente, foram propostos questionamentos, como “o tamanho do pé permite inferir sobre alguma característica física da pessoa?”, “existe relação entre o tamanho do pé e a altura do indivíduo?”. Esses questionamentos estimularam os alunos a refletirem sobre possíveis relações entre medidas corporais, como entre o tamanho do pé e a altura de uma pessoa. Motivados pelas hipóteses levantadas, os estudantes decidiram coletar dados reais na sala, medindo os tamanhos dos pés e as alturas dos colegas, com o objetivo de validar suas suposições.

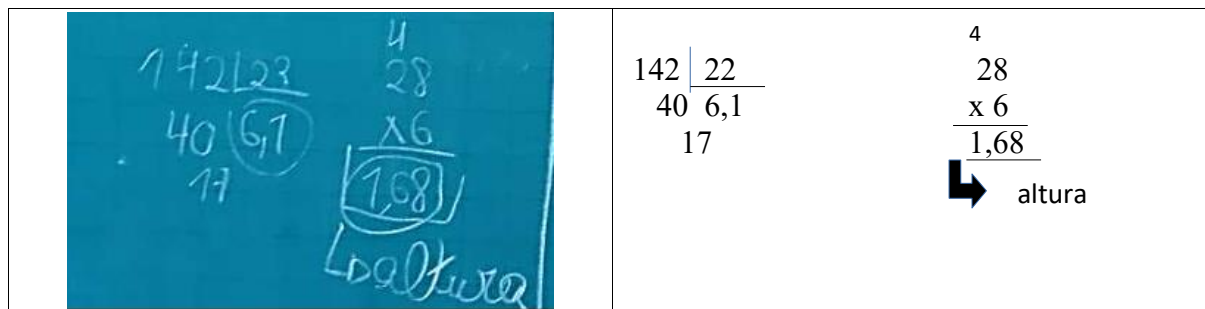
A partir desses dados coletados pelos alunos, realizou-se uma discussão que orientou o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Esse momento em que os alunos começam a relacionar conceitos matemáticos para solucionar o problema é chamado por Brousseau (1986) Dialética da formulação.

Os estudantes mobilizaram diferentes estratégias para estimar a altura do personagem fictício com base no tamanho da pegada. Entre elas, destacam-se: (1) o cálculo da razão entre a altura e o tamanho do pé de um integrante do grupo, multiplicando esse valor pela medida da pegada; (2) a organização dos dados por meio da igualdade entre duas frações, com o objetivo de encontrar a altura como incógnita; (3) a realização de comparações entre as medidas de altura e comprimento dos pés de aproximadamente cinco pessoas, incluindo colegas e professores; e (4) o

cálculo da razão média entre altura e tamanho do pé a partir dos dados coletados dos membros de um grupo, utilizando essa razão para estimar a altura do suspeito.

Em relação a estratégia (1), o registro apresentado na Figura 2, mostra que os alunos encontraram a razão existente entre a altura e o tamanho do pé de um integrante no grupo e depois multiplicaram esse valor pelo tamanho do pé do meliante.

Figura 2: Estratégia da razão entre duas grandezas



Fonte: Cassoli (2019, p. 49)

Após escrever os cálculos na lousa, os alunos tiveram a oportunidade de explicar o passo a passo das suas estratégias para os outros grupos, como mostra o trecho a seguir:

Aluno 1: A ALTURA DO PÉ DELE é 28 cm ((ao se referirem à “altura do pé”, os estudantes estão considerando, na verdade, a medida do pé entre o dedo maior e o calcanhar)).

Aluno 2: É 28,3 cm! Aluno 1: É 28,3 , mas a gente arredondou. Daí a minha altura é 1,42... e daí o meu pé mede 23 cm...Dai eu dividi minha altura pelo meu pé... EU ARREDONDEI.

Professora|pesquisadora: No caso a sua altura você colocou como centímetros também... Né então tira a virgula.

Aluno 1: E aqui eu vou arredondar e fazer o resultado vezes o pé do meliante.

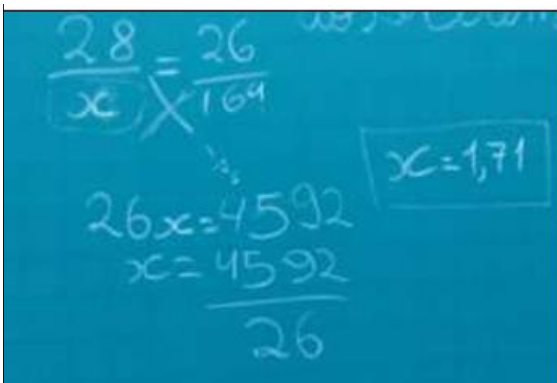
Essa estratégia revela as dificuldades do grupo em associar a divisão convencional (como o método das “chaves”) à representação fracionária. Essa limitação está relacionada à compreensão de que uma divisão a/b com $b \neq 0$, representa um único número — a razão — mesmo sendo expressa por dois numerais (Lamon, 2012). No entanto, essa dificuldade não impediu a manifestação de elementos do raciocínio proporcional, que envolve conceitos multiplicativos e de divisão. Ainda que os alunos não tenham formalizado a relação por meio de frações, identificaram a existência de uma razão entre duas grandezas e reconheceram que essa razão, ao ser multiplicada pela medida da pegada do meliante, poderia levar à

estimativa procurada. Tal percepção está relacionada ao raciocínio relativo, conforme descrito por Lamon (2012), que envolve a comparação entre medidas e a identificação de uma variação sistemática entre elas. Isso contribui para o amadurecimento do raciocínio proporcional, de modo que o raciocínio relativo facilita a construção do significado do conceito de razão, permitindo que o aluno, em etapas posteriores, seja capaz de realizar representações fracionárias a partir desses dados (Cassoli, 2019).

Além disso, por meio das falas observa-se aproximações dos números decimais e o reconhecimento com unidades de medidas, que está diretamente relacionado com o critério de medição.

A estratégia (2) se deu pela igualdade entre frações que foram organizadas de modo que o numerador das frações representava o tamanho do pé de uma pessoa e o denominador, a altura dela. A partir dessa configuração, foi possível determinar o valor da variável por meio da proporcionalidade entre as grandezas (Figura 3).

Figura 3: Estratégia de igualdade de frações



$$\frac{28}{x} = \frac{26}{164}$$

$$26x = 4592$$

$$x = \frac{4592}{26}$$

$$x = 1,71$$

Fonte: Cassoli (2019, p. 52)

Essa estratégia evidencia que o grupo consegue relacionar o conceito de divisão com a representação fracionária, compreendendo que uma divisão do tipo a/b com $b \neq 0$, representa uma razão entre grandezas. Além disso, os estudantes demonstraram habilidade em estabelecer igualdades entre frações, reconhecendo que tais relações possibilitam a determinação de uma medida desconhecida. Esse processo está relacionado ao critério de processos de unitização, conforme descrito por Lamon (2012). O processo de unitização consiste na reorganização das grandezas em análise. Em outras palavras, ocorre quando o grupo opta por estruturar a fração considerando os tamanhos dos pés como numerador e as alturas como denominador da fração. Esse processo também está vinculado com os raciocínios

progressivo e regressivo, bem como à compreensão do conceito de equivalência entre frações.

No que se refere a estratégia (3) alguns grupos recorreram a estratégias não matemáticas, como entrevistas, para tentar identificar o suspeito. No entanto, foi necessário intervir pedagogicamente e direcioná-los à análise da situação sob uma perspectiva matemática. Assim, enquanto professoras, orientamos a organizar os dados coletados de modo a favorecer a resolução do problema por meio de procedimentos matemáticos. A partir dessa mediação, os grupos optaram por sistematizar as informações em tabelas (Figura 4), o que possibilitou a identificação de padrões e relações entre as variáveis envolvidas.

Figura 4: Estratégia de organização de dados em tabelas

Nomes:	Diego	Bárbara	Márcio	Marcelo	Leo	Marcia	Pamela
Altura:	1,64	1,72	1,71	1,60	1,39	1,71	1,61
Tamanho do pé:	28	28	28	25	23	28	25

Fonte: Cassoli (2019. p, 54)

Partindo disso, compararam as medidas e chegaram a um intervalo de altura, na qual o meliante poderia ter de 1,64 m à 1,71 m de altura. Essa estratégia está relacionada ao critério de quantidades e covariação (Lamon, 2012). Tal critério envolve a habilidade de identificar, mensurar e reconhecer a variação entre grandezas. No caso analisado, os grupos que formularam essas hipóteses conseguiram distinguir duas variáveis — o tamanho do pé (em centímetros) e a altura (em metros) — observando que ambas variavam.

Os grupos que formularam essa hipótese observaram que os dados estavam distribuídos entre duas grandezas — tamanho do pé (cm) e altura (m) — e perceberam que essas variáveis poderiam ser organizadas de forma crescente, estabelecendo relações de intervalo. Para Cyrino *et al.* (2014), a identificação e quantificação das grandezas, bem como a análise de suas variações, favorece o desenvolvimento de formas mais elaboradas de raciocínio, que ultrapassam a simples percepção de informações óbvias nos contextos analisados.

A estratégia (4) está relacionada com o conceito de média aritmética, na qual, os alunos mediram os tamanhos dos pés e as alturas um dos outros, calcularam a

média de cada uma dessas grandezas e, em seguida, determinaram a razão entre elas (Figura 5). A partir dessa razão média, multiplicaram pelo tamanho da pegada do suspeito, chegando à estimativa de 1,74 m para a altura do meliante.

Figura 5: Estratégia média aritmética

Handwritten work on a blue background. It shows two columns of calculations. The left column is labeled 'MEDIDA DO PÉ' and lists values 27,5, 26,0, 24,5, 27,5, which are summed to 105,5. This is then divided by 4 to get 26,37. The right column is labeled 'ALTURA' and lists values 1,54, 1,45, 1,47, 1,60, which are summed to 6,04. This is then divided by 4 to get 1,51. There are also some additional numbers like 26,37 and 1,51 written at the top right of the work.	* Média $\frac{26,37}{553} \frac{1,51}{17,4}$ MEDIDA DO PÉ 27,5 26,0 24,5 27,5 4 <u>105,5</u> 26,37 02 ALTURA 1,54 1,45 1,47 1,60 6,04 4,00 <u>1,51</u> 000
---	--

Fonte: Cassoli (2019, p. 56)

Nesta estratégia, embora os alunos não tenham representado a divisão na forma fracionária, demonstraram compreensão dos conceitos de média e razão. Ao somar os valores dos pés e das alturas e dividir pela quantidade de integrantes, aplicaram um procedimento relacionado com o critério de partilha e comparação, conforme a compreensão de Lamon (2012) sobre o que sejam tais critérios. No entanto, os estudantes dividiram a razão das alturas pela razão dos pés, o que resultou em um valor que não corresponde à altura do suspeito. Apesar do erro procedimental, a estratégia apresenta indícios do raciocínio proporcional, uma vez que os alunos formularam hipóteses com base em relações entre grandezas. Esses equívocos foram abordados pelos professores nos momentos das Dialéticas da validação e da institucionalização, juntos aos estudantes.

Essas duas Dialéticas ocorreram de forma integrada no âmbito de toda a turma, o que vai ao encontro dos pressupostos de Sousa, Alves e Souza (2023), quando afirmam que as situações adidáticas coexistem com as situações didáticas, permitindo que a autonomia do aluno se articule à intervenção do professor.

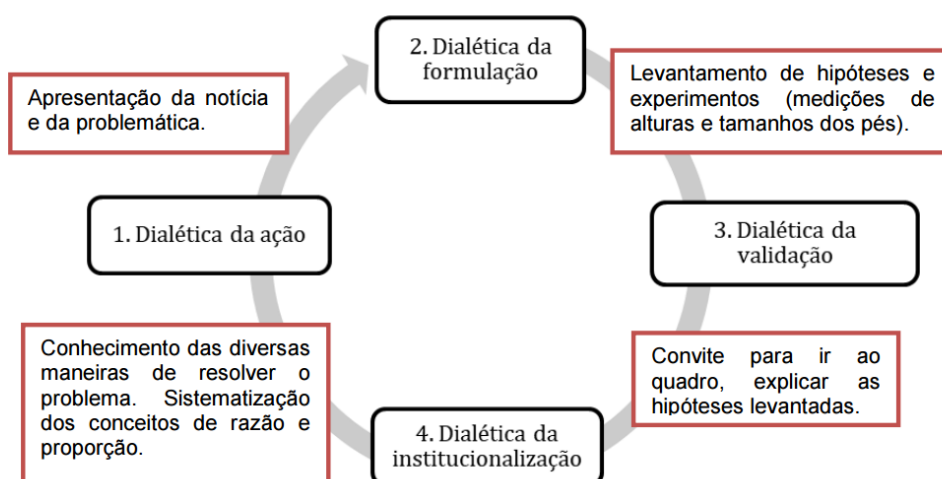
Assim, pós elaborar estratégias para a solução do problema, pedimos para que cada grupo apresentasse os procedimentos à turma, (conforme representado nas

Figuras 1, 2, 3 e 4), com intuito de validar as estratégias coletivamente. Essa socialização permitiu à turma refletir sobre as diferentes abordagens utilizadas, compará-las e discutir quais seriam mais adequadas para a resolução do problema proposto. De acordo com Brousseau (1986) esse momento se caracteriza como Dialética de validação.

Ao término de cada apresentação, na condição de professoras mediadoras do processo, realizamos a sistematização dos conceitos matemáticos mobilizados em cada grupo. Essa mediação possibilitou aos estudantes compreenderem que o problema admitia múltiplas formas de resolução que eram igualmente válidas. Esse momento corresponde à Dialética da Institucionalização, (Brousseau, 1986), na qual o conhecimento construído pelos alunos passa a ser reconhecido em seu caráter geral, ganhando legitimidade no contexto escolar. Nessa fase da atividade, os grupos foram capazes de sistematizar os conceitos mobilizados, reconhecendo a validade das diferentes estratégias apresentadas. Cada grupo, então, apropriou-se da abordagem que considerou mais eficaz para estimar a altura do sequestrador, o que evidencia o processo de consolidação e formalização do saber matemático em sala de aula.

Sintetizamos na Figura 6, a seguir, os caminhos seguidos pela turma no desenvolvimento da tarefa, de modo articulado ao desenvolvimento das dialéticas.

Figura 6: Síntese das dialéticas articuladas ao desenvolvimento da atividade matemática



Fonte: Cassoli (2019, p. 56)

Por meio destes processos, foi possível sistematizar e institucionalizar o conceito de razão entre duas medidas e de proporcionalidade, juntos aos estudantes.

Observou-se que a atividade, fundamentada na TSD, possibilitou o desenvolvimento da autonomia dos alunos. Em diferentes situações, eles foram capazes de elaborar hipóteses e buscar soluções de forma independente — aspecto essencial para a construção do pensamento matemático, especialmente no que se refere ao raciocínio proporcional. No entanto, a institucionalização dos conceitos matemáticos só se concretizou devido às intervenções e orientações docentes ao longo da atividade, o que reforça a importância do papel docente como mediador no processo de aprendizagem em propostas dessa natureza.

Considerações e recomendações finais

As análises mostraram que ao longo do desenvolvimento da atividade, a organização do *milieu* favoreceu a atuação autônoma dos estudantes, permitindo que eles se engajassem ativamente nas tarefas propostas. As professoras atuaram como mediadoras considerando as especificidades de cada grupo no que diz respeito à apropriação e usos dos conceitos matemáticos envolvidos.

No contexto desta pesquisa, foi especialmente durante as etapas correspondentes às dialéticas da formulação e da validação que se tornaram mais evidentes os indícios de desenvolvimento do raciocínio proporcional por parte dos estudantes. Esses momentos foram fundamentais, pois permitiram aos grupos socializarem suas estratégias – construídas anteriormente na Dialética da ação – e justificar suas escolhas diante dos colegas. Nesse processo de argumentação e análise coletiva, emergiram com maior clareza os critérios relacionados ao raciocínio proporcional descritos por Lamon (2012).

Sobre a organização do *milieu*, é importante ressaltar que a organização em grupos foi fundamental para que os estudantes pudessem dialogar, elaborar estratégias coletivamente e coletar dados suficientes (medidas dos pés e das alturas de membros do grupo) para levantar hipóteses e validá-las. Em tempo, a exposição das estratégias dos grupos no meio do processo de investigação foi salutar para que a turma toda tivesse acesso à formas de pensamento divergentes e pudessem avaliá-las e confrontar com suas próprias estratégias. Essas ações foram responsáveis por

provocar desequilíbrios que foram relevantes para as tomadas de decisões dos grupos e resolução do problema proposto.

A tarefa proposta, na medida em que propiciou indagações e espaços para estabelecimento de diferentes estratégias deu espaço tanto para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, quanto – e sobretudo – para o estabelecimento de diferentes caminhos que permitiram a abordagem e manifestação, de diferentes formas, de conceitos intrínsecos ao desenvolvimento do raciocínio proporcional. Particularmente, os modos de condução da atividade possibilitaram a institucionalização do conceito de razão entre duas medidas e as consequências para as compreensões do conceito de proporcionalidade. De modo geral, os elementos associados ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, emergentes da atividade matemática pautada na TSD, portanto, foram suscitados pelos objetivos didáticos da tarefa, pelos modos de condução e orientação pelas professoras, ao enfatizarem e validarem determinadas estratégias apresentadas pelos estudantes, e pelas possibilidades de abordagem dos conceitos matemáticos pelas próprias características da tarefa proposta, que incentivou determinadas ações e procedimentos matemáticos nos processos de devolução aos grupos.

Por fim, no decorrer do desenvolvimento da presente pesquisa, voltada para o raciocínio proporcional, emergem novas possibilidades de pesquisa, focadas no desenvolvimento do pensamento proporcional, por meio de tarefas embasadas na TSD, no Ensino Fundamental, de modo a priorizar outras componentes deste pensamento e indicando relações com a construção de outros conhecimentos matemáticos fundamentais, como funções.

Referências

BLUM, W. Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht: Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: BÜCHTER, A. et al. (Orgs.) **Realitätsnaher Mathematikunterricht**: vom Fach aus und für die Praxis. 1. Ed. Berlin: Franzbecker, 2006. p. 8-23.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática (1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

CASSOLI, C. **O desenvolvimento do raciocínio proporcional em atividades encaminhadas de acordo com a teoria das situações didáticas: um estudo com alunos do ensino fundamental**. 2019. 83 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Universidade Federal do Paraná, [S. l.], 2019.

COUTINHO, L; TORTOLA, E. Raciocínio proporcional em uma atividade de modelagem matemática por alunos da educação infantil. **Vidya**, v. 40, n. 2, p. 65-85, 2020.

CYRINO, M. C. C. T, *et al.* Formação de Professores em Comunidades de Prática: frações e raciocínio proporcional. **Londrina: UEL**, p. 37-63, 2014.

DE SOUSA, R. T; ALVES, F. R. V. A Teoria das Situações Didáticas no contexto de competições olímpicas: a experiência na Olimpíada Internacional Mathématiques Sans Frontières. **Revista DoCEntes**, v. 9, n. 25, p. 12-19, 2024.

Lamon, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. Routledge. New York, 2012.

LESH, R; POST, T; BEHR, M. **Raciocínio Proporcional**. Number Concepts and Operations in the Middle Grades, p. 1-21, 1988.

LITZ LAMBLÉM, R; BITTAR, M. Reflexões sobre a teoria das situações didáticas por duas pesquisadoras em diferentes estágios da vida acadêmica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 2, 2018.

SANTOS FILHO, J. C. dos. Pesquisa quantitativa versus pesquisa qualitativa: o desafio paradigmático. In: Santos Filho, José Camilo dos; GAMBOA, Silvio Sánchez. **Pesquisa educacional: quantidade-qualidade**. 7 ed. São Paulo: Cortez, 2009. p. 13-59.

SOUZA, R. T.; ALVES, FRV; SOUZA, M. J. A. Categorias do Raciocínio Intuitivo e Teoria das Situações Didáticas: uma perspectiva sobre a intuição e o raciocínio matemático. **Revista de Estudios y Experiencias en Educación-REXE**, v. 22, n. 49, p. 284-302, 2023.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Secretaria de Educação Básica**. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: matemática. Curitiba: SEED, 2008.