



Edição Especial

X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
Universidade Estadual do Norte do Paraná - Cornélio Procópio (PR), 2024

A INTERVENÇÃO DO PROFESSOR NO USO DE DESENHOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

*THE USE OF DRAWINGS AND TEACHER INTERVENTION IN MATHEMATICAL
MODELING ACTIVITIES*

Talita Dutra da Hora¹
Lourdes Maria Werle de Almeida²

Resumo

O objetivo é investigar como a intervenção estratégica do professor pode colaborar com o uso de desenhos em atividades de modelagem matemática. O quadro teórico considera aspectos relativos à modelagem matemática e seu uso na sala de aula e o uso de desenhos e a intervenção do professor. A investigação, de cunho qualitativo, refere-se a uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por vinte e cinco estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental. Os resultados sinalizam que a intervenção da professora motivou uma abordagem estratégica da situação e os *feedbacks* fornecidos permitiram aos estudantes utilizar o desenho como um instrumento de avaliação e refinamento do modelo matemático. A intervenção do professor pode colaborar com o uso do desenho em atividades de modelagem matemática, por meio da motivação do uso da estratégia, da orientação para a construção e interpretação de desenhos em consonância com as demandas da atividade, da conscientização dos benefícios cognitivos e metacognitivos do uso do desenho e do conhecimento de características e elementos essenciais para o uso eficiente do desenho.

¹ Mestre em Ensino pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEN). Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP) Cornélio Procópio – PR.

² Doutora em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM). Universidade Estadual de Londrina (UEL). Londrina – PR.



Palavras-chave: Anos Iniciais; Estratégia; Conhecimento Estratégico.

Abstract

The objective is to investigate how the teacher's strategic intervention can contribute to the use of drawings in mathematical modeling activities. The theoretical framework considers aspects related to mathematical modeling and its use in the classroom and the use of drawings and the teacher's intervention. The qualitative research refers to a mathematical modeling activity developed by twenty-five students in the 5th grade of Elementary School. The results indicate that the teacher's intervention motivated a strategic approach to the situation and the feedback provided allowed the students to use drawing as an instrument for evaluating and refining the mathematical model. The teacher's intervention can contribute to the use of drawing in mathematical modeling activities by motivating the use of the strategy, providing guidance for the construction and interpretation of drawings in line with the demands of the activity, raising awareness of the cognitive and metacognitive benefits of using drawings, and providing knowledge of the characteristics and essential elements for the efficient use of drawings.

Keywords: Early Years; Strategy; Strategic Knowledge.

Introdução

A modelagem matemática na sala de aula vem sendo apontada como atividade orientada pela investigação de uma situação da realidade por meio da matemática, de modo a apresentar uma solução para um problema identificado nessa situação (Ramos; Almeida, 2021).

No âmbito da Educação Básica, particularmente, documentos norteadores para a prática educacional, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, incentivam a introdução da modelagem nas aulas de matemática e mencionam procedimentos suscitados em atividades desta natureza como “potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático”, além de valorizar a autonomia dos estudantes e favorecer à articulação da matemática com outras áreas do conhecimento (Brasil, 2018, p. 266).

De fato, Burak (2010) considera que a introdução de atividades de modelagem matemática desde os primeiros anos escolares tem como finalidade a aprendizagem, propiciando cenários de investigação, análise e reflexão de problemas cuja origem não é a própria Matemática. Conforme aponta Almeida (2018), problemas desse tipo não possuem soluções pré-estabelecidas, desafiando os estudantes a fazer idealizações, elencar hipóteses, definir estratégias capazes de conduzir a uma

solução, elaborar um modelo matemático e monitorar os encaminhamentos de resolução.

Neste sentido, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula pode requerer dos estudantes alta demanda cognitiva. Essa pode ser uma razão pela qual alguns autores vêm indicando a importância de estratégias cognitivas e metacognitivas como meio de amparar os procedimentos dos estudantes (Blum, 2015; Castro; Almeida, 2023).

Em particular, Rellensmann *et al.* (2022) destacam o uso de desenhos como estratégia que pode apoiar os estudantes no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Entretanto, o traçado de desenhos pode não se dar de modo espontâneo e não é qualquer tipo de desenho que proporciona ao estudante entender a situação e avançar no desenvolvimento da atividade (Van Meter; Firetto, 2013; Rellensmann *et al.*, 2022). Segundo Rellensmann (2019), uma intervenção estratégica do professor pode auxiliar os estudantes a superar possíveis dificuldades no desenvolvimento de atividades de modelagem e contribuir para que a estratégia do uso de desenhos se torne mais útil para a resolução de um problema.

Levando em consideração essas discussões já identificadas na literatura, o presente artigo tem como objetivo investigar como a intervenção estratégica do professor pode colaborar com o uso de desenhos em atividades de modelagem matemática. Com essa finalidade, com base em um quadro teórico relativo à modelagem matemática e a sala de aula, o uso de desenhos e a intervenção do professor, é desenvolvida uma atividade por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. O presente artigo consiste em uma versão aprimorada de trabalho previamente apresentado no X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (X EPSEM). Na versão atual, foram incluídas análises adicionais, revisão da metodologia e aprofundamento das discussões, visando ampliar os resultados obtidos anteriormente.

Aporte Teórico

Modelagem Matemática e a Sala de Aula

No contexto da sala de aula, a modelagem matemática pode ser caracterizada como uma alternativa pedagógica que parte de situações-problema, oriundas do

cotidiano dos estudantes ou de temas de seu interesse, e que são resolvidas por meio da matemática mediante a construção de modelos matemáticos (Almeida; Silva; Vertuan, 2013).

Conforme sugere Almeida (2022), modelos matemáticos são estruturas matemáticas que apresentam características e regularidades do fenômeno investigado, com o propósito de descrever, explicar ou predizer seu comportamento. No contexto educacional, os modelos matemáticos podem ser expressos de diversas maneiras, a depender do nível de escolaridade em que a atividade de modelagem está sendo realizada e dos objetivos do professor — por exemplo, por meio de gráficos, expressões, desenhos, tabelas, diagramas, colagens, operações, entre outros (Tortola, 2016).

A busca da solução mediada pela construção de modelos matemáticos requer dos estudantes um conjunto de procedimentos que são associados a fases do desenvolvimento da atividade de modelagem. Essas fases compõe os chamados ciclos de modelagem e têm como finalidade apresentar um esquema idealizado do desenvolvimento de uma atividade de modelagem, não se configurando uma estrutura rígida e linear, mas incluindo idas e vindas entre as diferentes fases as quais são recorrentes e relevantes na atividade (Almeida; Silva, 2021).

Almeida, Silva e Vertuan (2013) propõe quatro fases relativas à realização da atividade - interação, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação – além de incluir no ciclo de modelagem matemática a elaboração de um relatório e apresentação de atividade na sala de aula. A interação se caracteriza pelo primeiro contato do estudante com a situação que se pretende estudar, em que se realiza a coleta de dados, objetivando conhecer características e especificidades para subsidiar a investigação. Essa fase guia à formulação do problema e a definição de metas para sua resolução. Na matematização, ocorre a transição da linguagem natural para a linguagem matemática, por meio da seleção de variáveis, simplificações e formulação de hipóteses, a fim de que seja possível realizar descrições matemáticas. A fase da resolução evidencia a construção de um modelo matemático que permite responder à situação em estudo. Os resultados são então interpretados e, no contexto da situação, verifica-se sua coerência e adequação, realizando-se os encaminhamentos necessários de validação. Por fim, o trabalho realizado é discutido no contexto da sala de aula e um relatório é elaborado pelos estudantes.

Galbraith e Stillman (2006) ponderam que a transição entre as fases de uma atividade de modelagem matemática pode se tornar um desafio que os estudantes precisam ultrapassar. Neste sentido, a literatura tem apontado a importância do uso de estratégias que deem suporte aos alunos na realização da atividade de modelagem. Particularmente, Rellensmann (2019) destaca o traçado de desenhos como possível estratégia para auxiliar os estudantes no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

O Uso de Desenhos e a Intervenção do Professor

O desenho é uma estratégia que integra o conhecimento estratégico, ao qual o indivíduo pode recorrer para alcançar os objetivos de uma tarefa cognitiva (Flavell, 1979). Esse tipo de conhecimento refere-se ao conjunto de “táticas de resolução, aplicabilidade e eficácia referente às demandas da tarefa e do contexto para atingir os resultados pretendidos” (Corrêa, 2021, p.44). Como forma de conhecimento metacognitivo, o conhecimento estratégico abrange o repertório do estudante em relação à sua própria aprendizagem, bem como as estratégias que utiliza na resolução de problemas.

Rellensmann *et al.* (2022) consideram que o conhecimento estratégico sobre o desenho refere-se à capacidade do indivíduo de reconhecer características úteis de um desenho que representa a estrutura de um problema de modelagem matemática – como, por exemplo, a representação correta de objetos e a indicação de informações numéricas pertinentes. O uso do desenho nessas condições sinaliza o fortalecimento desse tipo de conhecimento e contribui para que o estudante desenvolva, gradualmente, a capacidade de selecionar e utilizar essa estratégia de forma apropriada.

Ao construir um desenho, o estudante mobiliza processos cognitivos com o objetivo de descrever informações visuais ou espaciais da situação de estudo. Nesse contexto, o desenho corresponde à exteriorização de uma imagem mental esboçada, na qual o modelo mental é transformado em uma representação visual externa (Van Meter; Garner, 2005). Nesse sentido, o desenho é considerado uma estratégia relevante, pois envolve processos cognitivos que podem incrementar a resolução de um problema, permitindo ao estudante imaginar, representar e interpretar diferentes elementos da situação, além de estabelecer semelhanças entre o desenho e o

problema investigado. Esse movimento pode apoiar a seleção, organização e sistematização de informações que contribuem para a construção de soluções (Van Meter; Firetto, 2013).

Entretanto, embora estudos teóricos e evidências empíricas destaquem a relevância da construção de desenhos para a aprendizagem e a resolução de problemas (Van Meter; Garner, 2005; Van Meter; Firetto, 2013; Hora; Almeida, 2024), Rellensmann *et al.* (2022) observam que, muitas vezes, os estudantes não constroem espontaneamente um desenho. Além disso, nem todo desenho contribui, de fato, para a compreensão da situação ou para o avanço no desenvolvimento da atividade. Nesse sentido, uma intervenção estratégica por parte do professor pode contribuir para o uso mais eficaz do desenho como recurso cognitivo e pedagógico.

Rellensmann (2019) menciona que na sala de aula, construir um desenho para resolver um problema em atividades de modelagem pode ser uma ação motivada por uma intervenção do professor, em que ele solicita aos estudantes que façam um desenho. Entretanto, é possível que o pedido para desenhar não seja suficiente, pois é importante não apenas que o estudante construa um desenho, mas que ele o utilize de forma que seja útil em diferentes fases da modelagem matemática realizada. Neste caso, o professor pode fornecer *feedbacks* sinalizando a ausência de elementos do desenho e destacando a importância de o desenho incluir semelhanças, relações e informações numéricas conforme consta na situação em estudo.

Os desenhos construídos pelos estudantes podem ser classificados de acordo com suas características como sendo desenhos situacionais, esboços ou desenhos matemáticos (Rellensmann, 2019). Os desenhos situacionais retratam a situação em estudo com bom nível de detalhamento, sendo, entretanto, os objetos desenhados de acordo com sua aparência física. Esse tipo de desenho pode apoiar o estudante na compreensão da situação, favorecendo a identificação de possíveis usos da matemática. O desenho como esboço diz respeito a um traçado simplificado em que o foco não está na estética, mas como suporte para o entendimento de aspectos relativos à situação. Um esboço pode apoiar a matematização da situação, na medida em que conceitos matemáticos implícitos no problema podem se tornar evidentes quando esboçados. O desenho matemático, por sua vez, representa uma sistematização de elementos e informações matemáticas essenciais da situação em estudo, favorecendo a identificação de conceitos, a matematização e a construção de um modelo matemático (Rellensmann *et al.*, 2022; Rellensmann, 2019).

Considerando que desenhos podem colaborar para a atividade de modelagem, eles podem se tornar mais completos e mais produtivos para o desenvolvimento da atividade de modelagem a partir da intervenção estratégica do professor.

Encaminhamentos metodológicos

A investigação realizada é orientada por uma abordagem de pesquisa qualitativa, sendo sua intenção descrever, interpretar e compreender os dados, de modo a identificar, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, como a intervenção estratégica do professor pode colaborar com o uso de desenhos de modo a fomentar as ações do estudante na atividade de modelagem matemática.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa tem as seguintes características: a fonte de dados é o ambiente natural, tem o investigador como instrumento principal, é descritiva, o interesse reside mais no processo do que no resultado, os dados são analisados de forma indutiva, o significado é de importância vital.

Na presente pesquisa os dados foram coletados com uma turma de vinte e cinco estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública localizada no estado do Paraná. A atividade foi desenvolvida em quatro aulas de uma hora cada e foi a terceira atividade implementada pela professora nessa turma. Os estudantes, nomeados por A1, A2, A3,..., A25, foram organizados em cinco grupos. Considerando a extensão do texto, nos referimos as resoluções do Grupo 1 (G1), cujos integrantes foram codificados como A2, A3, A8, A13, A17 e no Grupo 2 (G2), os estudantes A6, A7, A9, A16, A19 estão incluídos.

A análise dos dados é conduzida com base em uma abordagem inspirada nos procedimentos da análise qualitativa de conteúdo, conforme proposta por Mayring (2014), que pode ser caracterizada como técnica sistemática e orientada para a interpretação de dados textuais, com procedimentos organizados de maneira flexível conforme o objetivo da pesquisa.

Inicialmente, foi realizada a transcrição do material empírico, composto por registros escritos de estudantes, áudios, vídeos, entrevistas, anotações em diário de campo e relatórios entregues pelos grupos. Em seguida, definiu-se a direção da análise com base no objetivo da identificação de indícios de como a intervenção

estratégica do professor pode favorecer o uso de desenhos pelos estudantes no desenvolvimento das atividades. A partir da transcrição, foram selecionadas unidades de análise que evidenciam relações entre as orientações do professor e a mobilização do desenho como estratégia na realização da atividade de modelagem. Para a etapa interpretativa, utilizou-se a técnica explicativa, conforme descrita por Mayring (2014), a qual se fundamenta na articulação entre o material analisado e o referencial teórico, permitindo interpretar os dados à luz da literatura. Esse processo possibilitou levantar evidências que subsidiaram a discussão e compreensão do fenômeno investigado.

A Intervenção da Professora na Atividade de Modelagem: Mediando o Uso Estratégico do Desenho

A temática da atividade de modelagem a que nos referimos - Pavimentação com *Pavers* - foi proposta pela professora a partir de uma demanda observada na sala de aula: a queixa recorrente dos estudantes sobre as dificuldades de acesso à escola em dias chuvosos, devido à presença trechos sem calçamento (ver Figura 1).

Figura 1: Vista superior das ruas de acesso à escola



Fonte: Google Earth

Diante do interesse em estudar possibilidades para pavimentar os trechos sem calçamento que dão acesso à escola, foram definidos os problemas para orientar a investigação: Quantos *pavers* serão necessários para pavimentação do trecho sem calçamento da rua de acesso à escola? Qual é o custo para essa pavimentação?

Para a investigação os estudantes, organizados em grupos, receberam imagens das vias que dão acesso à escola (Figura 1), além de informações sobre *pavers*, conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1: Informações sobre *pavers*

Largura de cada unidade de <i>paver</i>	10cm
Comprimento de cada unidade de <i>paver</i>	20cm
Preço por metro quadrado de <i>paver</i>	R\$ 43,90/m ²

Fonte: Empresa local

Inicialmente, os estudantes, sob orientação da professora, buscaram inteirar-se da situação em estudo por meio de discussões sobre os trajetos utilizados para chegar à escola. A partir desse diálogo, foram definidos os trechos a serem pavimentados, com base nos percursos utilizados: o grupo G1 escolheu o trecho 1 e o grupo G2 o trecho 2, conforme Figura 2.

Figura 2: Trechos escolhidos para pavimentação



Fonte: Google Earth

Durante essa etapa, surgiram dúvidas quanto ao formato dos *pavers* e à maneira como são dispostos nas vias. Diante disso, a professora sugeriu uma visita à área externa da escola para observação no local, conforme Figura 3.

Após a observação externa, os estudantes retornaram à sala de aula e deu-se início a uma discussão voltada à formulação de hipóteses e à realização de simplificações. Para incentivar esse processo, a professora propôs os seguintes questionamentos: O que vocês observaram sobre os *pavers*? Alguém já viu uma forma diferente de instalação? A partir dessas perguntas, os estudantes começaram

a compartilhar suas ideias e observações, destacando aspectos que consideraram relevantes, como: o espaço entre um *paver* e outro seria desprezado na fase de cálculos; a forma de disposição dos *pavers* não altera o total de peças necessárias.

Figura 3: Estudantes observando pavimentação da rua próxima à escola



Fonte: Dados da pesquisa

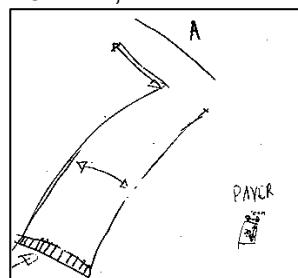
Com base nas hipóteses formuladas, cada grupo passou a estabelecer critérios e estratégias próprias para resolver o problema. O grupo G1, em particular, demonstrou dificuldades para definir encaminhamentos para o desenvolvimento da atividade, como indicado no diálogo a seguir.

Professora: Com as informações recebidas e observações realizadas, podemos determinar quantos *pavers* serão necessários para a pavimentação?

A3: Deve ter algum jeito de saber a quantidade, mas eu não sei qual.
A2: Não sei como podemos fazer.

Professora: Porque vocês não desenham? Façam um desenho para visualizar o que a situação lhes propõe.

A3: Isso, vamos desenhar.



A2: Agora entendi o que temos que fazer! Nós vamos colocar os *pavers* aqui (indicação no desenho), para isso nós precisamos do tamanho da rua.

A3: Professora, como vamos descobrir o tamanho da rua? Nós podemos medir?

O diálogo evidencia que os estudantes, inicialmente, apresentavam dificuldades para compreender a situação e definir estratégias de resolução. O obstáculo enfrentado começou a ser superado a partir da intervenção da professora,

que sugeriu a construção de um desenho como recurso para representar a situação. A ação docente nesse caso, proporcionou a organização de uma estrutura para resolver o problema. Essa mediação permitiu que os estudantes externalizassem a estrutura do problema e passassem a compreendê-lo sob uma nova perspectiva. Neste sentido, a intervenção da professora favoreceu o que Rellensmann *et al.* (2022) caracterizam como conhecimento estratégico ativado pelo uso do desenho na abordagem de uma situação-problema.

O desenho construído permitiu que os estudantes percebessem que as informações inicialmente fornecidas não eram suficientes para calcular a quantidade de *pavers*. A partir dessa constatação, surgiu a necessidade de buscar dados adicionais, o que levou a professora a sugerir o uso do *Google Earth*³ para obtenção de medidas das vias, conforme Figura 4.

Figura 4: Estudantes no laboratório de informática



Fonte: Dados da pesquisa

O uso do *Google Earth* permitiu aos estudantes associar as vias a um formato retangular e obter as medidas necessárias para avançar na matematização da situação, conforme ilustra o diálogo.

A13: As ruas parecem um retângulo!

A8: Verdade! Precisamos saber as medidas.

A13: Aqui dá 6m de largura e 165m de comprimento nessa parte (indicação no computador) e 6m de largura e 54m de comprimento nessa outra.

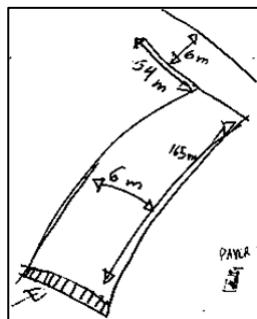
[...]

Professora: O que vocês já conseguiram fazer?

A2: A gente achou que a rua tem o formato de um retângulo e, olhando aqui no *Google Earth* nós vimos quais são as medidas do trecho.

Professora: Certo, anotem então essas informações no desenho de vocês.

³ *Google Earth* é um programa de computador cuja função é apresentar um modelo tridimensional do globo terrestre, para maiores informações acessar: <https://earth.google.com/web/>.



A2: Já sei! A gente precisa preencher toda essa parte de dentro com *pavers*.

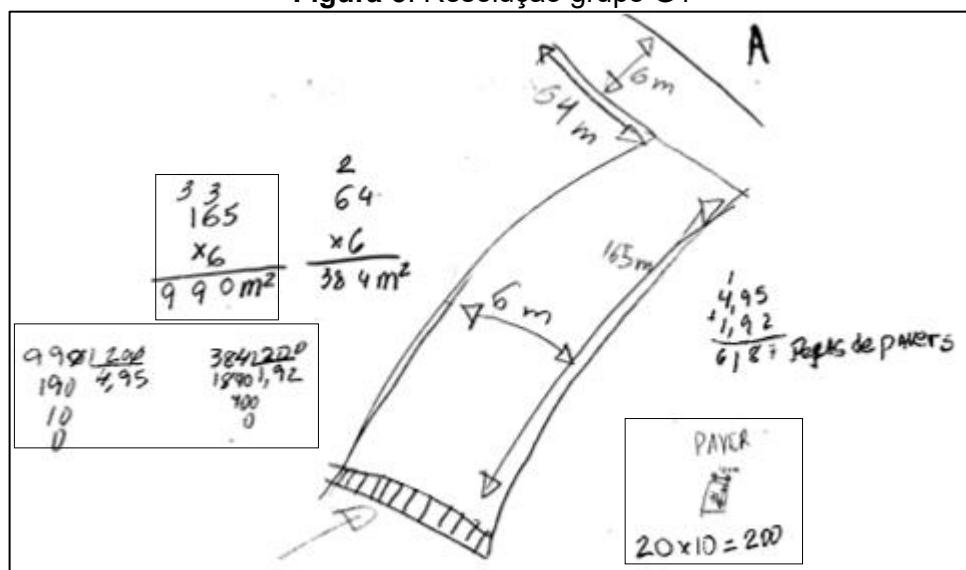
Professora: Agora que vocês desenharam, o que precisam calcular para preencher toda essa região (apontando para o desenho)?

A2: Precisamos calcular a área!

A intervenção da professora possibilitou que os estudantes associassem as medidas obtidas com o uso do *Google Earth* ao desenho construído com lápis e papel. Esta associação favoreceu a organização das informações e contribuiu para que os estudantes identificassem a necessidade de calcular a área como estratégia para estimar a quantidade de *pavers*. Neste caso, o questionamento da professora ativou a mobilização do conceito de área.

Mediante a organização de informações numéricas no desenho, o grupo G1 calculou a área do trecho. Em seguida, os estudantes utilizaram a mesma regra para calcular a área de cada *paver*, no caso, da superfície que ficaria exposta na rua após a pavimentação, pois também possuem formato retangular (Figura 5).

Figura 5: Resolução grupo G1



Fonte: Dados da pesquisa

O desenho construído representa uma visão geral da situação em estudo, expresso por meio de linhas e traços grosseiros, incluindo informações numéricas relevantes. Vale observar que a simplificação de considerar o trecho como retangular, embora o próprio desenho não aponte para uma figura retangular, faz com que o desenho, embora importante para a obtenção da resposta, pode ser classificado como esboço, tendo em conta a classificação apresentada em Rellensmann (2019).

O esboço serviu de apoio para a matematização da situação e para a correção de equívocos. Os estudantes, entretanto, não realizaram a conversão entre as unidades de medida das dimensões da rua e das dimensões do *paver*, concluindo, equivocadamente, que para a pavimentação do trecho 1 seriam necessárias, aproximadamente, 7 peças de *pavers*. Então, a professora realiza uma intervenção, conforme sinaliza o diálogo.

Professora: Considerando as medidas que vocês anotaram no desenho (referindo-se à figura 5), qual a largura da rua e qual a largura do *paver*?

A2: A rua tem 6 metros e o *paver* 10 centímetros.

Professora: Certo, quantos *pavers* de 10cm eu preciso enfileirar para preencher os 6 metros? Observem no desenho!

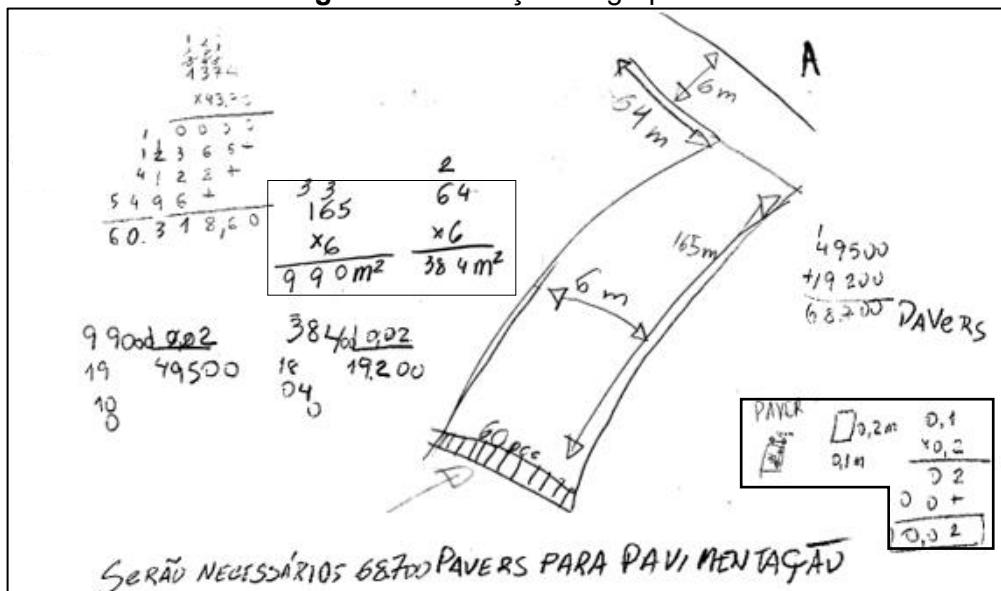
A13: Dá para ir somando até chegar na largura ($10+10+10\dots$).

A2: Se fosse 1m seriam 10 peças, como são 6m então é 60 peças.

Professora: Isso, anotem no desenho! Percebam que para preencher a largura da rua é preciso 60 peças? Mas vocês fizeram aqui (apontando para o desenho dos alunos) que seriam necessárias apenas 7 peças!

A intervenção da professora permitiu que os estudantes avançassem na matematização, corrigissem equívocos e utilizassem o desenho como um instrumento que guia a ressignificação, ou ainda, como um instrumento de *feedback*, em que o processo recursivo orientado pelo desenho serviu de base para obtenção da resposta para o problema. Nesse caso, o modelo matemático pode ser caracterizado como uma associação do esboço construído com as operações realizadas (Figura 6).

Os estudantes do grupo G1 concluirão que para a pavimentação do trecho 1 seriam necessárias cerca de 68.700 peças de *paver*, o que implicaria em custo aproximado de R\$60.318,60. Os cálculos foram realizados com base na área total da via a ser pavimentada.

Figura 6: Resolução do grupo G1

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação ao grupo G2, inicialmente não houve consenso com relação às possibilidades para determinar a quantidade de *pavers* necessário para o calçamento do trecho 2. Ocorreu então a intervenção da professora sugerindo a estratégia, de construção de desenho para associado à situação.

Professora: Então não estão conseguindo encontrar uma maneira para determinar o número de *pavers* no trecho 2?

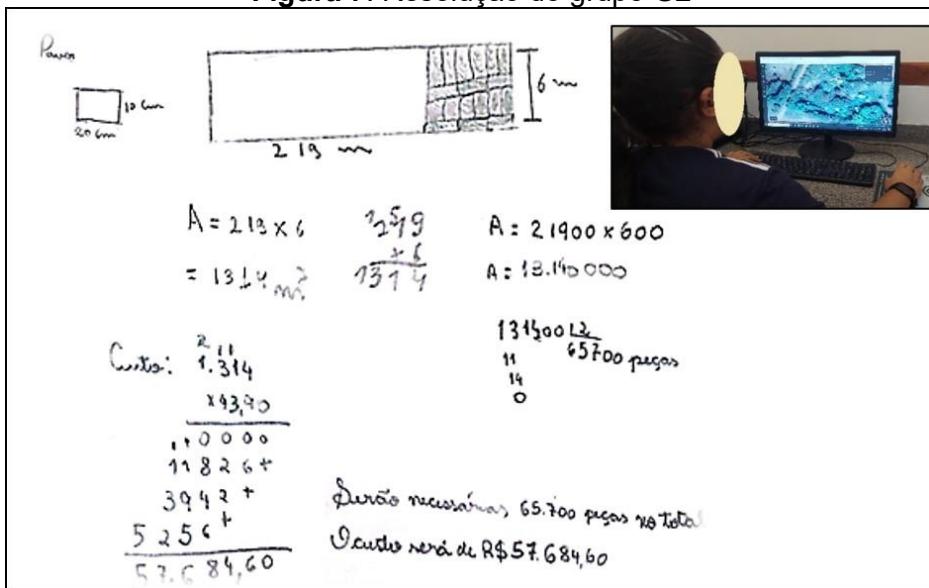
A6: A gente pensou em fazer alguma estimativa, mas não chegamos em um acordo.

Professora: Vocês precisam pensar em uma outra estratégia! Que tal fazer um desenho para visualizar o que podem fazer? (Foi traçado pelos estudantes um desenho conforme Figura 7).

O desenho produzido a partir da intervenção da professora, permitiu aos estudantes visualizar a situação, superar o impasse gerado pela ausência de percepção de um meio para resolver o problema bem como reconhecer a necessidade de obter dados precisos, como as medidas do trecho a ser pavimentado. A construção do desenho, nesse contexto, favoreceu a organização das informações e o planejamento da resolução.

Assim como no grupo G1, a professora sugeriu o uso do *Google Earth*, o que permitiu aos estudantes coletar informações essenciais para prosseguir com a atividade (Figura 7).

Figura 7: Resolução do grupo G2



Fonte: Dados da pesquisa

Construir um desenho permitiu aos estudantes vislumbrar encaminhamentos que permitissem a matematização da situação, associando a estrutura do problema a ideia de área. O desenho feito pelo grupo, além de expressar informações relevantes para a resolução do problema, inclui informações matemáticas, como, por exemplo, a representação de um retângulo para se referir à estrutura da rua e a indicação de suas medidas. Considerando estes elementos, o desenho se classifica como desenho matemático relativamente à caracterização apresentada Rellensmann *et al.* (2022).

O modelo matemático nesse caso pode ser considerado uma associação do desenho com as operações realizadas. Os estudantes concluíram que para a pavimentação do trecho 2 seriam necessárias cerca de 65.700 peças, com o custo aproximado de R\$57.684,60.

A professora sugeriu que os resultados obtidos pelos grupos fossem validados junto a uma empresa local fornecedora de *pavers*, o que permitiu verificar a coerência entre as informações do problema, o desenho construído e os dados fornecidos pela empresa. A empresa informou que o material é comercializado por metro quadrado (m^2), e que, para cada 1 m^2 de pavimentação são utilizadas 50 peças de *paver*. Com base nessa validação, os resultados obtidos foram considerados satisfatórios.

A partir dos resultados obtidos, a professora elaborou um projeto evidenciando a necessidade de pavimentação dos trechos e o custo aproximado da obra, a fim de subsidiar a tomada de decisão pela direção da escola.

Resultados

Considerando o desenvolvimento da atividade e as interações ocorridas ao longo das etapas e que constituem as unidades de análise na presente investigação, pode-se apontar diferentes desdobramentos para o desenvolvimento da atividade de modelagem decorrentes da intervenção da professora relativamente ao uso de desenhos.

O pedido para os estudantes representarem a situação por meio de um desenho, favoreceu a visualização do problema, a organização das informações e a superação de impasses relacionados à definição de estratégias de resolução. Essa intervenção também colaborou para o avanço na matematização, ao incentivar a articulação entre o desenho e informações numéricas pertinentes, contribuindo para que os estudantes identificassem a necessidade de realizar cálculos, como o de área, e estabelecessem conexões com conceitos matemáticos relevantes. Além disso, os *feedbacks* fornecidos pela professora ao longo da atividade orientaram os estudantes na avaliação dos desenhos construídos, possibilitando o refinamento do modelo matemático. Nesse processo, o desenho não apenas apoiou a compreensão da situação, mas funcionou como um instrumento metacognitivo, orientando a sistematização de dados e contribuindo para a construção e validação do modelo matemático. Conforme apontam Rellensmann *et al.* (2022), tais intervenções podem fortalecer o desenvolvimento do conhecimento estratégico sobre o uso do desenho, ao estimular a identificação de características úteis e à ressignificação do processo de resolução. Nesse contexto, o desenho atuou não apenas como representação, mas como uma ferramenta metacognitiva, apoiando a sistematização de informações e servindo de base para o refinamento do modelo matemático.

Essa abordagem está em consonância com Rellensmann *et al.* (2022), que destacam o papel da intervenção do professor na mobilização do conhecimento estratégico sobre o uso do desenho, sobretudo quando os estudantes enfrentam dificuldades em definir caminhos para a busca de uma solução.

O Quadro 2 apresenta uma síntese das intervenções e seus efeitos produzidos no desenvolvimento da atividade.

Quadro 2: Desdobramentos da Intervenção da professora para o uso do desenho no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática

A ocorrência da intervenção	Descrição da ação docente	Desdobramentos para o desenvolvimento da atividade
A intervenção se deu a partir da observação de que os estudantes não identificaram o que poderiam fazer sinalizando não terem compreendido a situação. Assim, atuou como meio de ação na fase de interação.	A professora sugeriu que os estudantes produzissem um desenho para visualizar os trechos e a localização dos pavers. ("Porque vocês não desenham? Façam um desenho para visualizar o que a situação lhes propõe.")	Os estudantes fizeram um desenho dos trechos, colocaram as medidas e tiveram os primeiros <i>insights</i> para determinar a quantidade de pavers necessários.
O conhecimento estratégico foi promovido mediante a indicação de uso do <i>Google Earth</i> e o registro, no desenho construído, de dados obtidos no <i>software</i> , indicando para a matematização da situação.	A professora assessorou o uso do <i>software</i> e promoveu a articulação de informações do <i>software</i> e gerou complementações no desenho dos estudantes. ("Anotem essas informações no desenho.")	Os estudantes representaram matematicamente a situação, transformando o desenho em um desenho matemático e incluindo informações relevantes.
Na fase de Resolução o apoio ao uso do desenho foi a estratégia que cujo desdobramento foi a resolução do problema.	Incentivou os estudantes a utilizar o desenho como estratégia para estruturar a resolução do problema. "Agora que vocês desenharam, o que precisam calcular para preencher toda essa região?"	A mediação da professora, ao propor o uso do desenho, ajudou os estudantes a identificar os conceitos matemáticos necessários para resolver o problema.
Interpretação de resultados e validação – <i>feedback</i> formativo para revisão do modelo	A intervenção da professora contribuiu para que os estudantes corrigissem equívocos e utilizassem o desenho como instrumento de <i>feedback</i> e ressignificação, orientando, de forma recursiva, o refinamento do modelo matemático. "Isso, anotem no desenho! Percebam que para preencher a largura da rua é preciso 60 peças, na resolução de vocês para preencher a rua toda seriam necessárias apenas 7 peças?"	A intervenção da professora incentivou os estudantes a reavaliar e refinar o modelo matemático construído, validando os resultados com base nas informações do problema, no desenho construído e na confirmação dos dados junto a uma empresa local fornecedora de pavers.

Fonte: As autoras

Considerações finais

Com o objetivo de investigar como a intervenção estratégica do professor pode colaborar com o uso de desenhos em atividades de modelagem matemática, analisamos uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

Os dados que subsidiam nossas discussões nos permitem inferir que, a intervenção da professora motivou uma abordagem estratégica da atividade, ao sugerir o uso do desenho como ferramenta para representar a estrutura do problema. Essa intervenção contribuiu para que os estudantes superassem impasses iniciais, organizassem as informações relevantes, visualizassem relações matemáticas implícitas na situação, utilizassem o desenho para compreender a situação e avançar na matematização. Além disso, o *feedback* fornecido pela professora sinalizando a importância de incluir no desenho semelhanças, relações e informações numéricas pertinentes, possibilitou aos estudantes utilizar o desenho como um instrumento de avaliação e refinamento do modelo matemático.

Este aspecto corrobora com a assertiva de Rellensmann (2019), de que o pedido para que o estudante visualize o problema por meio de um desenho e os *feedbacks* fornecidos pelo professor, podem contribuir para a compreensão da situação, para o avanço no desenvolvimento da atividade, para a obtenção de *insights* sobre estruturas matemáticas, para a identificação de métodos de resolução, para obtenção do modelo matemático e para a avaliação do processo de resolução.

De fato, nos dois grupos, embora os desenhos tivessem características sutilmente distintas, estes proporcionaram que os estudantes obtivessem a resposta. Os desenhos, a partir de suas características, foram classificados em esboço e matemático. Nesta perspectiva, o desenho como um esboço representa uma visão geral da situação investigada, expresso por meio de linhas e traços grosseiros; o desenho matemático expressa a sistematização de conceitos matemáticos relevantes para resolver o problema (Rellensmann, 2019; Rellensmann et al. 2022).

Há de se considerar que, a intervenção do professor possibilitou aos estudantes executar a estratégia de desenho em sintonia com a estrutura do problema. Esse movimento, segundo Rellensmann et al. (2022), contribui para o conhecimento de características úteis que um desenho deve incluir para representar adequadamente a estrutura de uma atividade de modelagem matemática (por exemplo, a representação correta de objetos e relações relevantes e a indicação de informações numéricas pertinentes). O uso do desenho nessas condições, sinaliza o fortalecimento do conhecimento estratégico sobre desenho em que gradualmente o estudante pode desenvolver a capacidade de selecionar e usar a estratégia de maneira apropriada.

Neste contexto, a investigação realizada nos permite delinear que a intervenção estratégica do professor pode colaborar com o uso de desenhos em atividades de modelagem matemática, por meio da motivação do uso da estratégia, da orientação para a construção e interpretação de desenhos em consonância com as demandas da atividade, da conscientização acerca dos benefícios cognitivos e metacognitivos do uso do desenho, da exploração de elementos essenciais e características úteis para o uso eficiente do desenho em atividades de modelagem matemática.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. **Vidya**, v. 42, n. 2, p.121-145, 2022.
- ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, 2018, p. 19–30.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; Semiótica e as ações cognitivas dos estudantes em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v.18, n.3, p. 623-642, 2012.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P. Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. **REnCiMa**, São Paulo, v.12, n.2, p. 1-27, mar. 2021.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2013.
- ALMEIDA, L.M.W; TORTOLA, E.; MERLI, R.F. Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v.14, n.2, p. 215-239, maio/ago. 2012.
- BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed), **The Proceddings of the 12th Internacional Congress on Mathematical Education**: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: Springer, p. 73-96, 2015.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BURAK, D. Modelagem matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenau, v.1, n.1, p. 10-27, 2010.

CASTRO, E. M. V.; ALMEIDA, L. M. W. The Individual and the Collaborative Nature of Metacognitive Strategies and Their Unfoldings for Mathematical Modelling. **Acta Scientiae**, v.25, n.3, p. 1-25, 2023.

CORRÊA, N. N. G. **Mapeamento da percepção do sistema metacognitivo na aprendizagem em Física**: um estudo dos relatos de estudantes do Ensino Médio. 191fls. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2021.

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. **American Psychologist**, v.34, p. 906–911, 1979.

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. **ZDM**, v.38, n.2, p. 143–162, 2006.

HORA, T. D.; ALMEIDA, L. M. W. O uso estratégico do Desenho em Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, v.13, n.31, p. 1–26, 2024.

RAMOS, D. C.; ALMEIDA, L. M. W. A. Interpretação aemiotica em atividades de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 35, n. 71, p. 1391-1415, dez. 2021

RELLENSMANN, J. *Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung*. Springer Spektrum, 2019.

RELLENSMANN, J. SCHUKAJLOW, S.; BLOMBERG, J. LEOPOLD, C. Effects of drawing instructions and strategic knowledge on mathematical modeling performance: Mediated by the use of the drawing strategy. **Wiley**, v.36, p. 402-417, 2022.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VAN METER, P.; FIRETTO, C. M. **Cognitive model of drawing construction. Learning through the construction of drawings**. In SCHRAW, G.; MCCRUDDEN, M. T.; ROBINSON, D. (Eds.), *Learning through visual displays*, p. 247–280, 2013.

VAN METER, P.; GARNER, J. The promise and practice of learner-generated drawing: literature review and synthesis. **Educational Psychology Review**, v. 17, n. 4, 285–325, 2005.