

Edição Especial

X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
Universidade Estadual do Norte do Paraná - Cornélio Procópio (PR), 2024

**MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISE DE MODELOS:
UMA ABORDAGEM INTEGRADA PARA O ENSINO DE
MATEMÁTICA**

*MATHEMATICAL MODELING AND MODEL ANALYSIS: AN INTEGRATED
APPROACH TO MATHEMATICS TEACHING*

Eduardo Cesar Tonin¹
Nabila Iasbik Giroti²
Adriana Helena Borssoi³

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de duas pesquisas de mestrado que adotaram, como alternativa pedagógica, a Modelagem Matemática e a Análise de Modelos, desenvolvidas, respectivamente, no Ensino Médio e no Ensino Superior. A Modelagem Matemática possibilita representar e compreender fenômenos do mundo real por meio da construção de modelos matemáticos, enquanto a Análise de Modelos contribui para avaliar, interpretar e aprimorar essas representações. Ambas as investigações partiram de uma mesma situação-problema: o estudo do movimento de um carrinho em uma rampa, com foco na relação entre o tempo de deslocamento e o ângulo de inclinação. No Ensino Médio, os estudantes utilizaram aplicativos de smartphone para a coleta de dados e o software GeoGebra para o ajuste de curvas e a construção dos modelos matemáticos, já no ensino superior foi realizado uma videoanálise através do software Tracker. Os resultados de ambos os estudos indicam que a articulação entre Modelagem Matemática e Análise de Modelos potencializa o desenvolvimento de competências matemáticas, promovendo uma aprendizagem contextualizada. Conclui-se que essa integração contribui não apenas para a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também para o desenvolvimento do

¹ Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

² Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

³ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Londrina. Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina.



pensamento crítico, mostrando a interdisciplinaridade em diferentes etapas da escolaridade e contextos educacionais.

Palavras chave: Educação Matemática. Ensino Médio. Ensino Superior.

Abstract

This paper presents the results of two master's studies that adopted Mathematical Modeling and Model Analysis as pedagogical alternatives, developed in High School and Higher Education, respectively. Mathematical Modeling enables the representation and understanding of real-world phenomena through the construction of mathematical models, while Model Analysis contributes to evaluating, interpreting, and refining these representations. Both investigations stemmed from the same problem: the study of the movement of a cart on a ramp, focusing on the relationship between travel time and the angle of inclination. In High School, students used smartphone applications for data collection and GeoGebra software for curve fitting and mathematical model construction, whereas in Higher Education, video analysis was performed using Tracker software. The results of both studies indicate that the integration of Mathematical Modeling and Model Analysis enhances the development of mathematical competencies, promoting contextualized learning. It is concluded that this integration contributes not only to the understanding of mathematical concepts but also to the development of critical thinking, demonstrating interdisciplinarity across different educational levels and contexts.

Keywords: Math education. Secondary Education. Higher Education.

Introdução

Este artigo é uma versão ampliada do texto submetido ao X EPMEM - Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática. Temos como objetivo compartilhar aspectos que se mostraram de duas pesquisas que buscaram articular a Modelagem Matemática e Análise de Modelos, uma no contexto do Ensino Médio e a outra no Ensino Superior, ambas realizadas entre 2022 e 2023 e defendidas em 2024. Em comum, as pesquisas abordaram a Modelagem Matemática e Análise de Modelos, assim como os pesquisadores, autores do texto, priorizaram o planejamento de atividades de Modelagem Matemática com experimentação.

O delineamento da pesquisa se iniciou no decorrer da disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva do Ensino, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática em que os autores eram alunos regulares. A disciplina foi desenvolvida a partir de três eixos que oportunizam a formação de professores em Modelagem Matemática, que se pautam em: aprender sobre, aprender por meio e ensinar usando Modelagem Matemática. E, diante da proximidade das temáticas, com o planejamento colaborativo de atividades e o aporte do grupo de estudos e pesquisa,

a fim de discutir e colaborar para o aprimoramento das pesquisas, foi possível realizar tanto o planejamento quanto a implementação das atividades.

Consideramos aqui a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem da Matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2016), que pode oportunizar a construção de conhecimentos e tornar o aluno autor do seu próprio aprendizado. A partir do convite para investigar uma situação-problema, os alunos podem se colocar em ação com interesse em resolver, investigar e formular hipóteses e conjecturas, mesmo que não tenham todas as ferramentas e aparato necessários. Dessa forma, essa alternativa se destaca pelo seu caráter investigativo, permitindo que os conhecimentos já adquiridos pelos alunos emergam e sejam reelaborados, bem como novos conhecimentos sejam construídos.

A Análise de Modelos, segundo Soares e Javaroni (2013), é uma abordagem que visa orientar o trabalho com modelos matemáticos no contexto educacional, especialmente em sala de aula, com o objetivo de analisar fenômenos específicos de diferentes áreas do conhecimento. Através dessa análise, novos conceitos matemáticos podem ser introduzidos, facilitando a compreensão e a aplicação prática desses conceitos em situações reais. Para as autoras, os modelos podem ser clássicos da literatura ou derivados de pesquisas recentes.

A Análise de Modelos é vista como uma estratégia para ajudar os alunos a compreender e explorar modelos matemáticos, contextualizar conceitos, incentivar o questionamento e aprimoramento dos modelos, e promover a integração entre a matemática e outras disciplinas. Para as autoras (Soares; Javaroni, 2013), essa abordagem visa aprofundar a compreensão dos estudantes sobre modelos matemáticos e sua aplicabilidade em problemas reais.

Evidenciamos que a Análise de Modelos não se restringe a uma etapa final do processo de modelagem, mas constitui uma prática investigativa contínua, que permite aos estudantes revisitá hipóteses, confrontar diferentes interpretações e refinar a compreensão de fenômenos complexos. Essa abordagem estimula o pensamento crítico ao promover a comparação entre modelos distintos — sejam eles construídos pelos próprios alunos ou retirados de fontes científicas —, possibilitando que se compreenda não apenas o funcionamento do modelo, mas também suas limitações, pressupostos e alcance explicativo.

Além disso, destacamos que a Análise de Modelos favorece a autonomia intelectual dos estudantes, pois desloca o foco do ensino da resolução de exercícios

padronizados e conduz os alunos à investigação de como a matemática pode ser articulada a problemas reais. Esse movimento promove um ambiente de aprendizagem mais dialógico e interdisciplinar, em que o equívoco é compreendido como parte do processo de construção do conhecimento, e não como algo a ser evitado. A Análise de Modelos, portanto, amplia as possibilidades de ensino e aprendizagem ao transformar a sala de aula em um espaço de produção e discussão de conhecimento matemático.

A literatura da área destaca frequentemente o empenho em desenvolver pesquisas em Educação Matemática que tragam à tona estratégias capazes de despertar nos alunos o interesse e a curiosidade pelo aprendizado dessa disciplina. De modo semelhante, os documentos oficiais que orientam a prática educativa no Brasil, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), indicam como objetivo que os estudantes sejam capazes de reconhecer situações em que a Matemática possa ser utilizada em seu cotidiano.

Entre as diversas temáticas e abordagens, a Modelagem Matemática e Análise de Modelos, emergem como alternativas pedagógicas que visam oportunizar a compreensão da Matemática, além de enriquecer a formação abrangente dos alunos. Apuramos, em Tonin (2024) e Giroti (2024), que ambas as alternativas possuem potenciais para contribuir com a formação dos alunos, pois permitem integrar conteúdos matemáticos à aspectos da vida cotidiana, razão pela qual a adotamos em nossa pesquisa no contexto da Educação Básica, com alunos do Ensino Médio, bem como com alunos de um curso de Engenharia Mecânica, na Graduação, como descreveremos na seção de aspectos metodológicos.

As pesquisas adotaram uma abordagem qualitativa para analisar dados da implementação de atividades de Modelagem Matemática na perspectiva da Análise de Modelos, tanto no Ensino Médio quanto no Superior. A seguir, será apresentada uma sessão destinada à Modelagem Matemática e Análise de Modelos, uma seção referente aos Aspectos Metodológicos, outra que aborda as Discussão dos Resultados e, por fim, as Considerações Finais.

Aporte teórico

Nas próximas seções, abordaremos três eixos centrais deste trabalho: Modelagem Matemática, Experimentação e Análise de Modelos. Primeiramente,

discute-se a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para representar e compreender fenômenos. Em seguida, a Experimentação é apresentada como recurso para coleta de dados e validação empírica. Por fim, trata-se da Análise de Modelos, que permite interpretar, avaliar e refinar os modelos construídos, considerando suas limitações e aplicabilidades.

Modelagem Matemática

Os modelos, especialmente os matemáticos, são representações simplificadas da realidade, criadas para facilitar sua descrição, seja de forma qualitativa (descrevendo características) ou quantitativa (expressando dados numericamente). Em algumas situações, os modelos são usados para tornar a realidade observável, especialmente quando sua complexidade dificulta uma descrição detalhada. Eles simplificam a realidade, permitindo uma análise mais acessível e uma compreensão mais clara de sistemas e fenômenos complexos. Conforme Gowers (2002, p. 8), elaborar um modelo “é o processo de considerar apenas os fatos essenciais de uma situação da vida real, transformando-a em um problema matemático”.

Segundo Almeida e Vertuan (2014, p. 2), um modelo matemático é um sistema conceitual, descriptivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática. Ele tem como objetivo descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, geralmente não matemático. Ainda, baseando-se em Almeida, Tortola e Merli (2012), um modelo matemático é aquilo que dá forma à solução de problemas específicos, enquanto a Modelagem Matemática é a atividade que busca essa solução. E isso nos dá embasamento para adentrarmos e discorrermos sobre a Modelagem Matemática na perspectiva do ensino.

A Modelagem Matemática é considerada como uma alternativa pedagógica para o ensino de matemática em sala de aula, visando despertar o interesse de estudantes por assuntos matemáticos, sob a ótica da Análise de Modelos, alinhado com o que abordam Borssoi e Almeida (2004). Para as autoras, a Modelagem Matemática por ser compreendida como uma alternativa que, dada uma situação-problema de um contexto real, configura-se como uma atividade que tende a ser encaminhada por meio de procedimentos. A escolha desses problemas são definidos a partir da realidade dos estudantes.

De modo geral, a Modelagem Matemática envolve processos que seguem uma lógica cíclica — o que muitos autores chamam de ciclo de modelagem. Para Blum e Niss (1991), esse processo ganha sentido quando conseguimos ligar situações do mundo real a questões e ideias matemáticas, especialmente aquelas que fazem parte do trabalho em sala de aula. Já em uma publicação mais recente, Niss e Blum (2020) reforçam essa visão ao sinalizar que falar em ciclo de modelagem implica, necessariamente, realizar uma atividade de Modelagem Matemática atribuída a um modelador.

Nesse sentido, concordamos com Almeida, Silva e Vertuan (2016), ao considerar que uma atividade de Modelagem Matemática pode ser entendida como um processo que parte de uma situação inicial, geralmente problemática, objetivando uma situação final, que representa a solução para o problema. Entre essas duas fases, há um caminho que envolve procedimentos e conceitos matemáticos. À solução matemática que se desenvolve ao longo do processo, denomina-se modelo matemático.

Segundo Silva, Barone e Basso (2016), a abordagem isolada e descontextualizada dos conceitos matemáticos no ambiente escolar tende a reforçar a percepção da matemática como uma ciência distante da realidade dos estudantes. Nesse sentido, a exploração de fenômenos do cotidiano por meio da Modelagem Matemática configura-se como uma alternativa que favorece o desenvolvimento do pensamento abstrato e hipotético, por meio da formulação, validação ou refutação de hipóteses, promovendo uma interação mais significativa com o conhecimento. Ainda de acordo com os autores, o uso das tecnologias digitais potencializa esse processo, ao proporcionar aos estudantes meios para interagir com os conceitos matemáticos e estabelecer conexões que facilitam sua compreensão e apropriação.

Silva (2019) afirma que a integração das tecnologias digitais à Educação Matemática, especialmente por meio da Modelagem Matemática, contribui para uma aprendizagem mais efetiva. O uso desses recursos tecnológicos favorece não apenas o acesso, a organização e a construção de novos conhecimentos, mas também estabelece conexões entre os conteúdos escolares e o cotidiano dos alunos, tornando a matemática mais próxima e significativa.

De acordo com Almeida, Sek e Castro (2024), o uso de tecnologias digitais na Modelagem Matemática não precisa atender a um padrão, pois está diretamente relacionado tanto às características da situação-problema quanto à forma como os

estudantes interagem com essas tecnologias. Dessa maneira, as tecnologias podem assumir diferentes funções no processo, desde a coleta e análise de dados até a reorganização das etapas de modelagem, ampliando as possibilidades de construção e validação dos modelos.

A presença das tecnologias digitais na Modelagem Matemática amplia as possibilidades de construção, análise e validação dos modelos, especialmente quando associada a situações que envolvem a experimentação. Nesse cenário, a experimentação ganha destaque por possibilitar a coleta de dados em situações reais, favorecendo a observação direta dos fenômenos e a produção de conhecimento matemático a partir da vivência dos estudantes. Assim, a experimentação deixa de ser apenas um recurso ilustrativo e passa a integrar as etapas do processo de modelagem, contribuindo para a articulação entre teoria, prática e análise crítica.

Experimentação em atividades de Modelagem Matemática

A experimentação no ensino está diretamente relacionada ao desenvolvimento de habilidades processuais, como observar, classificar, levantar questionamentos e formular hipóteses, consideradas fundamentais para o progresso de competências mais elaboradas, como planejamento, previsão e interpretação de dados (Ward et al., 2010). No entanto, o experimento não deve ser visto apenas como um recurso de motivação ou como reprodução do método científico, mas como uma estratégia didática que favorece a aprendizagem centrada no estudante (Espinoza, 2010).

Nessa perspectiva, o processo experimental no ambiente escolar pode ser compreendido em três etapas principais: a formulação de hipóteses para resolução de problemas, o planejamento e execução de experimentos – que podem ser físicos, computacionais, geométricos ou algébricos – e, por fim, a apresentação e análise dos resultados, que podem levar à reformulação da hipótese inicial (Emden; Sumfleth, 2014). Ao se referir a atividades de Modelagem Matemática, Bassanezi (2010, p. 26), caracteriza a experimentação como:

Uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Entretanto, a contribuição de um matemático nesta fase, muitas vezes,

pode ser fundamental e direcionar a pesquisa no sentido de facilitar, posteriormente, o cálculo dos parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos. A adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental podem dar maior grau de confiabilidade aos dados obtidos. Muitas vezes, novas técnicas de pesquisa empírica exercem pressão sobre o foco de interesse da teoria e permitem uma melhor seleção das variáveis essenciais envolvidas no fenômeno.

Essa abordagem experimental oferece uma perspectiva que sugere a Modelagem Matemática como uma oportunidade para a inclusão da experimentação no ambiente da sala de aula.

Portanto, é possível concluir que a experimentação, tanto no ensino quanto na pesquisa, constitui uma ferramenta essencial para o desenvolvimento do pensamento científico. Ao ser integrada à prática pedagógica e à Modelagem Matemática, ela promove o aprendizado, a autonomia intelectual e a construção de conhecimento.

No artigo “Um estudo sobre o potencial da experimentação em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Superior”, Almeida, Silva e Borssoi (2021) abordam esse aspecto apontando a experimentação e sua associação com a tecnologia digital e Modelagem Matemática como meio para gerar ideias, proporcionar ações e conduzir à utilização de ferramentas que podem colaborar para a aprendizagem. Segundo as autoras:

Dirigindo-se à experimentação dos estudantes e sua associação com a tecnologia digital, lança luz sobre a relevância de, na dinâmica de uma atividade de modelagem matemática, proporcionar meios para que o estudante se engaje nas ações, tome decisões, esteja em interação com o professor, com os colegas e com os meios que lhe permitem experimentar no desenvolvimento de atividades de modelagem (Almeida; Silva; Borssoi, 2021, p. 143).

Greefrath (2011) aponta que a experimentação constitui uma função central da tecnologia nas atividades de Modelagem Matemática. Nesse contexto, a manipulação de dados em um software, integrando-os a informações contidas em planilhas, exemplifica uma forma de experimentação viabilizada pelos recursos digitais. O autor destaca ainda que a simulação apresenta semelhanças significativas com a experimentação mediada pela tecnologia, possibilitando a realização de experimentos virtuais utilizando o modelo matemático.

A experimentação, quando associada à Modelagem Matemática, é potencializada pelas tecnologias digitais, que atuam como ferramentas para coleta, análise e validação de dados.

Nesse sentido, a experimentação — seja ela realizada de forma concreta ou por meio de simulações digitais — amplia as possibilidades de investigação dentro da Modelagem Matemática, ao permitir a coleta e manipulação de dados diretamente relacionados ao fenômeno estudado. No entanto, para que esses modelos construídos ganhem sentido e relevância no processo de aprendizagem, é necessário ir além da simples obtenção de resultados. É nesse ponto que se insere a Análise de Modelos, etapa fundamental necessária que dá aporte quanto às representações matemáticas elaboradas, possibilitando compreender suas limitações e aperfeiçoar sua correspondência com a realidade.

Análise de Modelos

Ao tratarmos de Modelagem Matemática no contexto educacional, é fundamental compreender que esse processo não se encerra na construção de um modelo matemático. Ele se amplia quando incorporamos a Análise de Modelos, que nos permite interpretar, avaliar e refinar os modelos criados, analisando como eles representam o fenômeno real e quais são suas limitações.

Dessa forma, de acordo com Soares e Javaroni (2013), a Análise de Modelos é um processo de Modelagem Matemática onde os alunos começam com um modelo matemático preexistente e buscam compreender o problema modelado, incluindo as suposições e simplificações feitas. O estudo foca na interpretação do modelo, na análise de suas soluções e na influência dos parâmetros em seu comportamento, avaliando o modelo em relação ao fenômeno estudado. De acordo com Soares e Javaroni (2013, p. 199), realizar a Análise de Modelos requer:

[...] (i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; (vi) análise das limitações do modelo.

As fases da Análise de Modelos envolvem a compreensão do fenômeno modelado, incluindo a coleta de dados relevantes; a identificação das simplificações e pressupostos do modelo matemático; a interpretação do significado de cada termo do modelo em relação ao fenômeno real; a análise das soluções do modelo e sua correspondência com o fenômeno; o estudo do impacto das variações dos parâmetros nas soluções; e a avaliação das limitações do modelo, reconhecendo suas simplificações e condições de validade para interpretar os resultados de maneira adequada.

A abordagem de Javaroni (2007) sinaliza a integração da matemática com outras disciplinas, mostrando como ela pode ser uma ferramenta fundamental na compreensão e análise de fenômenos do mundo real. Isso não apenas torna o aprendizado da matemática mais interessante, mas também ajuda os alunos a perceberem sua aplicabilidade em diversas áreas da ciência. A pesquisa de Javaroni (2007) também destaca como a Modelagem Matemática pode ser uma alternativa pedagógica de ensino para tornar os conceitos matemáticos mais acessíveis. Ao analisar modelos de fenômenos físicos, os alunos conseguiram explorar e compreender conceitos matemáticos complexos, como campos de direção de equações diferenciais e derivadas, em um contexto prático e aplicado.

A partir dessa perspectiva da Modelagem Matemática com outras áreas do conhecimento, como propõe Javaroni (2007), torna-se relevante compreender como essas articulações se concretizam nas práticas de pesquisa. Nesse contexto, apresentamos a seguir os encaminhamentos metodológicos adotados em duas investigações que exploraram o potencial da Modelagem Matemática em diálogo com a Análise de Modelos. As pesquisas, desenvolvidas por Tonin (2024) e Giroti (2024), tomaram como ponto de partida uma mesma situação-problema e, a partir dela, delinearam caminhos investigativos que evidenciam a riqueza e a complexidade dessa abordagem no ensino de matemática.

Encaminhamentos metodológicos

Neste artigo, buscamos compartilhar aspectos relevantes de duas pesquisas que articularam a Modelagem Matemática com a Análise de Modelos. Para isso, discutimos os resultados obtidos em cada uma delas a partir de uma situação-problema comum: o movimento de um carrinho em uma rampa, que serviu de base

para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Ambas as pesquisas adotaram a Análise de Conteúdo, conforme proposta por Bardin (2011), como metodologia principal. Contudo, neste texto, apresentamos uma análise interpretativa sustentada nos resultados obtidos por Tonin (2024) e Giroti (2024).

A pesquisa de Tonin (2024) foi conduzida em uma escola do interior do Paraná, com uma turma do 3º ano do Ensino Médio, na disciplina de Matemática, composta por 24 estudantes. A atividade teve início com a apresentação, por parte do professor, de uma tábua de madeira e de um carrinho construído por ele. Após um momento de discussão coletiva, os alunos levantaram diferentes possibilidades de investigação com os materiais apresentados e, em consenso, optaram por estudar a relação entre o tempo de deslocamento do carrinho em uma rampa, e o ângulo de inclinação da mesma.

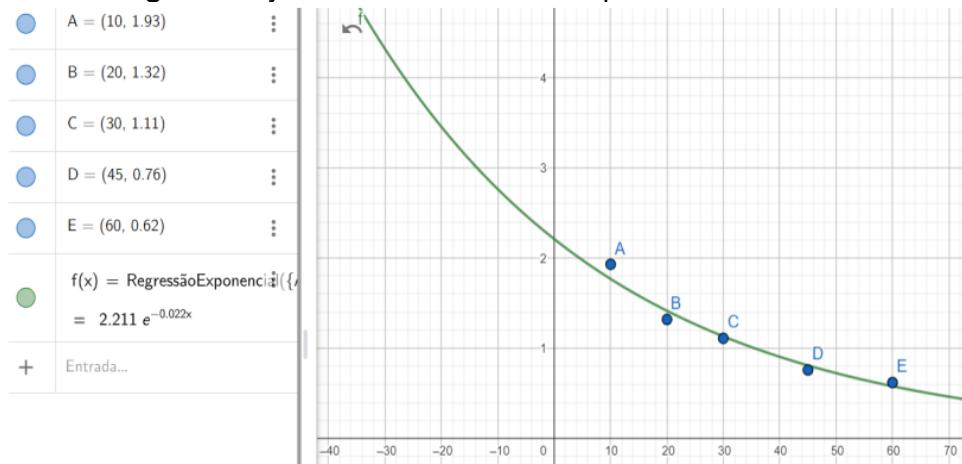
Figura 1: Coleta de dados da atividade desenvolvida



Fonte: Arquivo do professor-pesquisador (2023)

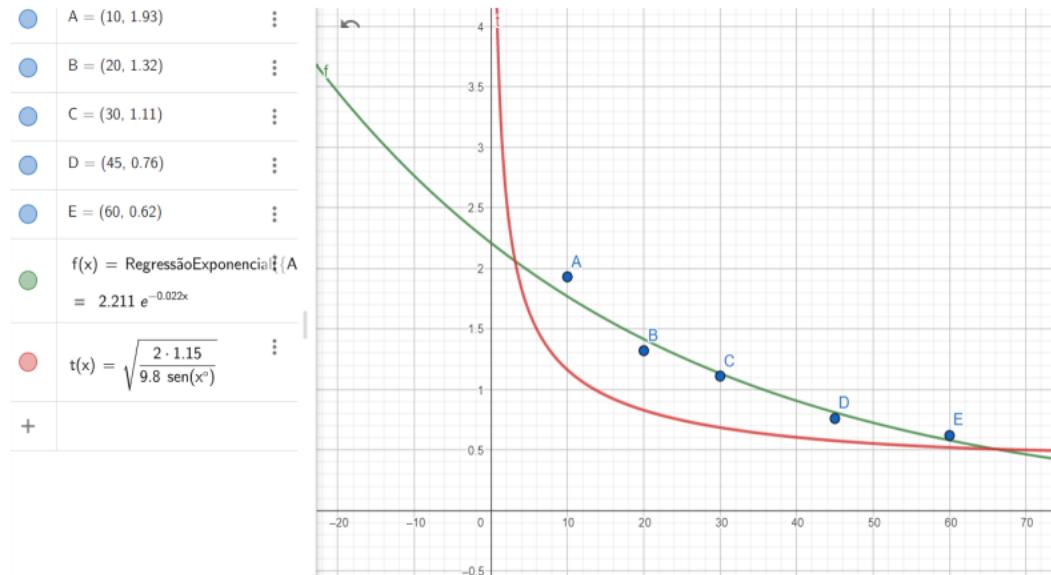
Para a coleta dos dados, os estudantes utilizaram aplicativos disponíveis em smartphones: o *Protractor*, para a medição do ângulo de inclinação da rampa, e o *Arduino Science Journal*, para o registro do tempo de deslocamento do carrinho. Na etapa de matematização dos dados obtidos, foi utilizado o software *GeoGebra*, por meio da funcionalidade de ajuste de curvas, com o objetivo de construir um modelo matemático que representasse o fenômeno investigado.

Após as discussões entre os grupos sobre qual curva representaria bem o fenômeno investigado, os alunos chegaram à conclusão que era a função $y = 2,211^{-0,022x}$, onde o termo dependente (x) corresponde ao tempo de deslocamento e o independente (y) ao ângulo de inclinação da rampa.

Figura 2: Ajuste de curvas realizado pelos alunos no GeoGebra

Fonte: Captura da tela de um aluno

Para a análise do modelo obtido pelos alunos, foi solicitado a eles que avaliassem as limitações e potencialidades do modelo e se existia modelos reconhecidos na literatura como apropriados para esse fenômeno em estudo. A partir de pesquisas, puderam fazer uma comparação do modelo por eles desenvolvidos com um modelo clássico da Física $t(\theta) = \sqrt{\frac{2s}{g \cdot \sin(\theta)}}$, onde $t(\theta)$ é o tempo de deslocamento do objeto no plano inclinado, s a distância a ser percorrida pelo objeto, g a gravidade do local e θ o ângulo de inclinação da rampa.

Figura 3: Comparação do comportamento das representações gráficas das funções

Fonte: captura da tela da dos alunos

Após uma análise e comparação dos modelos, os alunos apresentaram como conclusão que, apesar do modelo clássico apresentar um melhor comportamento, se for observado sua representação gráfica e resultados, o modelo por eles desenvolvido ainda se adequa melhor a situação pois o modelo clássico não considera o atrito em seus resultados, situação que na prática nunca existirá de fato.

Já a pesquisa de Giroti (2024) foi realizada na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), com atividades de Modelagem Matemática implementadas no primeiro semestre de 2023. A turma de 45 estudantes foi organizada em 10 grupos, dos quais 9 participaram ativamente. As atividades ocorreram em duas sessões de 100 minutos cada, em sala de aula e nos laboratórios de Física e Informática, e foram planejadas pela pesquisadora e pela professora responsável pela disciplina, alinhadas às Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) de Engenharia. O foco da análise se voltou a um único grupo, a partir de critérios a partir da delimitação do *corpus* da pesquisa.

A atividade envolveu um experimento para analisar a aceleração em um trilho de ar (equivalente a uma rampa sem, ou com pouco, atrito). Os alunos gravaram o movimento com smartphones e usaram um simulador (acelerômetro) para obter dados precisos. Os grupos deduziram a aceleração em um plano inclinado ($a = g \cdot \operatorname{sen}(\theta)$) aplicando conceitos de Física e EDO.

Além de resolver analiticamente problemas de valor inicial de EDO. Os dados obtidos por experimentação foram analisados com o programa Tracker, que gerou gráficos de distância em função do tempo, bem como o modelo matemático obtido através de uma solução particular para a EDO, dado por $s(t) = \frac{g \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot t^2}{2}$.

As variáveis da equação diferencial ordinária (EDO) são $s(t)$, que representa o deslocamento e é a variável dependente, e t , que é o tempo, a variável independente. Os parâmetros g (aceleração gravitacional) e θ (ângulo de inclinação) são constantes, considerados parâmetros da EDO. Portanto, a equação descreve como o deslocamento $s(t)$ varia em função do tempo t , com os outros valores sendo constantes.

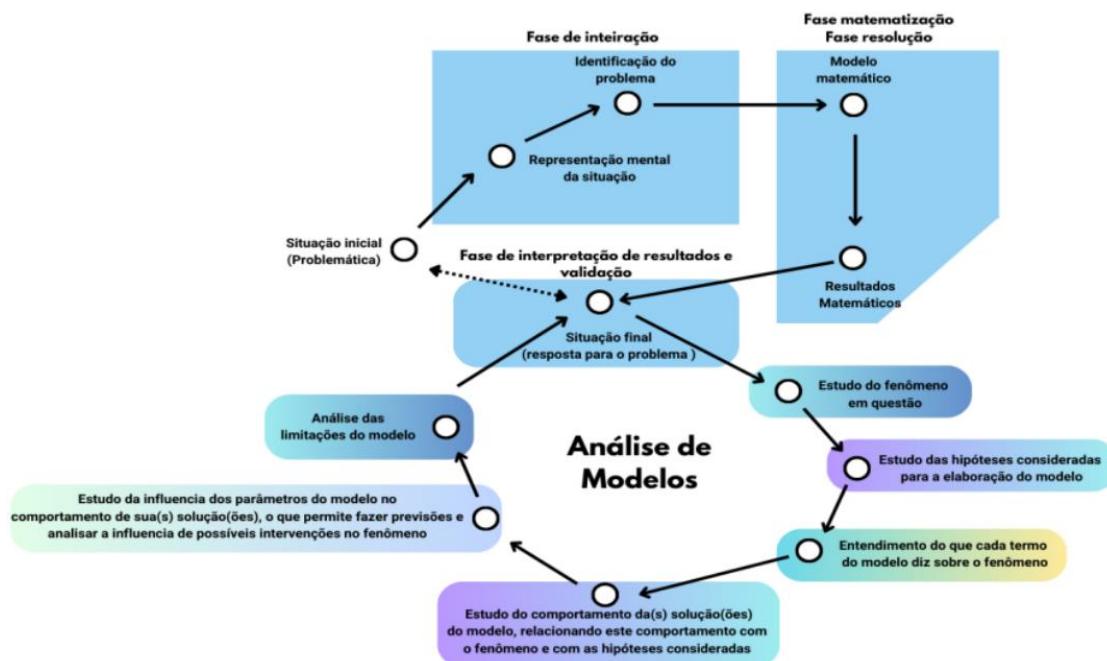
A seguir, na seção de discussão de resultados, exploraremos como essas experiências contribuíram para a compreensão da Modelagem Matemática com Análise de Modelos em diferentes contextos educacionais, destacando as principais observações e implicações para o aprimoramento das práticas educacionais.

Resultados e Discussão

As atividades foram conduzidas em contextos distintos, envolvendo turmas diferentes. A primeira atividade foi realizada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, enquanto a segunda foi desenvolvida com alunos de Engenharia, no Ensino Superior. No entanto, apesar dessas diferenças na etapa da escolaridade e nos ambientes, é possível identificar semelhanças no desenvolvimento de ambas as atividades. A Figura 4 apresenta um esquema de como se deu a implementação da atividade em termos das fases/etapas da Modelagem Matemática com Análise de Modelos desenvolvida com os alunos.

A imagem evidencia que o processo de Modelagem Matemática, articulado à Análise de Modelos, não se encerra de forma linear. Ao contrário, torna-se um movimento cíclico, no qual a validação e a interpretação dos resultados possibilitam revisituar hipóteses, ajustar parâmetros e aprofundar a compreensão do fenômeno em estudo.

Figura 4: Síntese do ciclo das fases/etapas
Modelagem Matemática



Fonte: Tonin (2024)

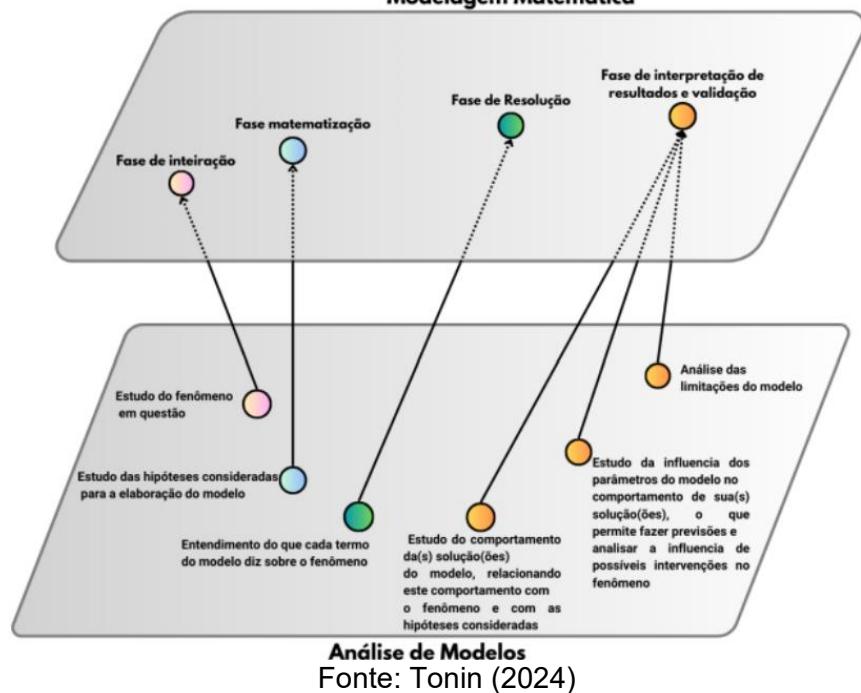
O esquema apresentado na Figura 4 expressa em que momento do ciclo de modelagem o professor-pesquisador optou por dedicar atenção à Análise de Modelos, o que parece considerá-la uma extensão da fase final da Modelagem Matemática.

Nesse sentido, a Análise de Modelos teve início no momento em que ocorreu a validação do modelo construído durante a atividade de Modelagem Matemática. Durante o desenvolvimento da atividade com os alunos, essa sequência foi seguida, porém de forma cíclica, mantendo entre si conexões, aspecto que é ilustrado de forma mais clara na Figura 5.

Cabe destacar que as pesquisas (Tonin, 2024, Giroti, 2024) levaram ao entendimento de que as fases da Modelagem Matemática não se restringem a uma sequência linear, mas se articulam com dimensões de Análise de Modelos, compondo um processo integrado. Cada etapa, desde a fase de interação até a fase de interpretação de resultados e validação, podem conectar-se a questões específicas, como a investigação do fenômeno, a definição de hipóteses, a compreensão dos termos do modelo e a análise do comportamento das soluções.

Essa organização evidencia que a Análise de Modelos não se configura como uma ação posterior ou acessória, mas como parte constitutiva do próprio processo de modelagem, possibilitando um constante retorno às hipóteses iniciais, o refinamento de parâmetros e a identificação de limitações. Desse modo, o esquema destaca a relevância de manter um diálogo permanente entre o modelo matemático construído e a realidade estudada, favorecendo a elaboração de previsões mais consistentes e intervenções fundamentadas no fenômeno investigado.

Figura 5: Sinergia existente entre as duas alternativas pedagógicas
Modelagem Matemática



Fonte: Tonin (2024)

Na Análise de Modelos, o item (i), referente ao estudo do fenômeno investigado, conecta-se diretamente ao momento de integração na Modelagem Matemática, pois, ao realizarem a coleta de dados, os próprios alunos já detinham certo conhecimento prévio sobre o fenômeno em análise. Já os itens (ii), que envolve o exame das hipóteses utilizadas na construção do modelo, e (iii), que trata da interpretação dos termos do modelo em relação ao fenômeno, relacionam-se às etapas de matematização e resolução. Nesse ponto, ao analisarem criticamente o modelo que haviam desenvolvido, os alunos puderam aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos mobilizados no processo.

Por fim, as três etapas finais da Análise de Modelos — (iv) análise do comportamento das soluções do modelo em relação ao fenômeno e às hipóteses assumidas, (v) investigação da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de suas soluções, permitindo previsões e a avaliação de possíveis intervenções no fenômeno, e (vi) exame das limitações do modelo — mostraram-se facilitadas aos alunos durante a análise das atividades. Isso se deu, em grande parte, à fase de interpretação de resultados e validação prevista na Modelagem Matemática, além de ter possibilitado o refinamento do modelo em estudo nos dois contextos analisados, incorporando hipóteses que anteriormente não haviam sido consideradas. Assim, pode-se concluir que, embora sejam propostas pedagógicas distintas, elas apresentam uma relação de complementaridade, como apontado por Sepúlveda, González-Gómez e Villa-Ochoa (2020).

O desenvolvimento de ambas as atividades, ainda que em contextos educacionais distintos (Ensino Médio e Ensino Superior), revelou semelhanças quanto aos recursos empregados pelos alunos. Para realizar tanto a Modelagem Matemática quanto a Análise de Modelos, os estudantes utilizaram desde instrumentos analógicos, como régua e transferidor, até recursos digitais, como aplicativos de smartphone e softwares de computador. Esses recursos mostraram-se fundamentais para a execução das atividades, permitindo, por exemplo, uma coleta de dados mais precisa por meio dos aplicativos de smartphone e a interpretação de gráficos gerados pelo GeoGebra, o que também possibilitou a retomada e o aprofundamento de conteúdos previamente trabalhados.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 31), os softwares “podem auxiliar alunos e professores na construção de gráficos e na observação da influência dos parâmetros, bem como na realização de cálculos”. Nesse sentido, a possibilidade de

experimentar, de visualizar e de coordenar de forma dinâmica diferentes representações, como a algébrica e as gráficas, “[...] são vantagens da interação de atividades de modelagem com as mídias informáticas” (p. 31).

O software GeoGebra facilitou a compreensão dos dados, pois a partir do ajuste de curvas e a observação da representação gráfica dos modelos em estudos, os estudantes chegaram a conclusões interessantes de como melhorar, adicionar parâmetros e refinar o modelo em estudo pelo 3º ano do Ensino Médio. Do mesmo modo, ao considerarmos a disciplina de EDO e os conteúdos nela estudados, especialmente o aqui disposto, o software Tracker desempenhou o mesmo papel com fundamental importância.

As ferramentas digitais são importantes no ensino de Matemática, pois ajudam a resolver diversos problemas e a compreender situações complexas, beneficiando tanto professores quanto alunos (Soares; Javaroni, 2013, Borssoi; Almeida, 2015). Essas tecnologias facilitam os processos de modelagem e permitem estabelecer conexões com o mundo real. As simulações, em especial, possibilitam a investigação de processos com base em modelos matemáticos, ampliando o entendimento e a aplicação prática dos conceitos estudados.

De acordo com Almeida, Seki e Castro (2024), o uso das tecnologias digitais na modelagem matemática não segue um padrão fixo, sendo condicionado tanto às características da situação-problema quanto à forma como os estudantes se relacionam com essas tecnologias. Dessa maneira, as tecnologias podem assumir diferentes papéis no processo, contribuindo desde a coleta de dados até a construção e análise de modelos.

Outro aspecto relevante a ser destacado é o papel da manipulação e da experimentação no processo de aprendizagem. Nas atividades analisadas, os alunos puderam observar diretamente o fenômeno em estudo e realizar a coleta de dados por meio da manipulação dos materiais disponíveis, o que lhes permitiu testar, na prática, os resultados apresentados pelos modelos matemáticos, atribuindo maior significado às atividades realizadas. Além disso, ao experimentarem e compararem dados empíricos utilizando os materiais e os softwares disponíveis, os estudantes foram capazes de identificar possibilidades de aprimoramento do modelo em análise, como a percepção da ausência de um parâmetro — o “ atrito ” — no modelo matemático. Esse tipo de constatação, possivelmente, não seria alcançado sem a vivência prática proporcionada pela experimentação.

Greefrath (2011) destaca que a tecnologia digital não precisa ser vista apenas como um elemento acessório no processo de modelagem. Pelo contrário, ela pode ser integrada em diferentes etapas do desenvolvimento das atividades, permitindo que os estudantes realizem experimentações ao longo do trabalho com a modelagem matemática. Entre outras possibilidades, a tecnologia pode apoiar ações como explorar, simular, visualizar, calcular, estimar e experimentar, sendo a interação entre múltiplas representações, viabilizada pelo uso de recursos tecnológicos e pela experimentação, fundamental para articular os aspectos empíricos, provenientes da observação e da prática, com os aspectos teóricos relacionados aos objetos matemáticos.

Por fim, outro aspecto relevante é a atuação do professor durante as atividades. No caso do 3º ano do Ensino Médio, em diversos momentos, a intervenção docente foi fundamental para o avanço das tarefas. Embora os alunos já tivessem conhecimentos prévios, o professor teve um papel importante ao direcionar e aprofundar tais conhecimentos, enriquecendo o desenvolvimento das atividades. Conforme apontam Almeida, Silva e Vertuan (2016), o professor deve atuar como orientador ao longo de todo o processo, o que implica uma mudança de postura, deixando de ser apenas um expositor de conteúdos e centralizador do conhecimento.

Almeida, Silva e Vertuan (2016) ressaltam que, no contexto da Modelagem Matemática, é fundamental que os estudantes façam conexões entre seus saberes, relacionando-os tanto à situação investigada quanto aos conceitos matemáticos, ou a ambos simultaneamente. Para isso, os autores destacam a importância de promover momentos de discussão ao longo da atividade, com o intuito de facilitar a superação de obstáculos, aumentar a motivação diante dos desafios e aprofundar a análise do problema em questão.

Durante essas discussões, é fundamental que o professor valorize igualmente as contribuições dos alunos e leve em consideração todos os resultados apresentados. Conforme ressaltam Blomhøj e Niss (2021), é essencial incentivar o desenvolvimento do pensamento crítico e investigativo, promovendo que os estudantes assumam uma postura ativa como protagonistas, em vez de simples espectadores. Tal abordagem não só favorece o progresso acadêmico, mas também contribui para a formação cidadã e social dos alunos. Dessa forma, o papel do professor vai além do detentor exclusivo do saber, tornando-se um orientador que conduz os estudantes no caminho da descoberta e da aprendizagem.

Considerações finais

Neste artigo, se objetivou compartilhar aspectos que se mostraram de duas pesquisas que buscaram articular a Modelagem Matemática e a Análise de Modelos. De maneira geral, observou-se um entusiasmo significativo dos alunos durante o desenvolvimento das atividades. Desde o início até o fim, os estudantes adotaram uma postura investigativa, tornando-se agentes ativos na construção do próprio conhecimento. Isso evidencia a importância do papel do professor como orientador, que guia a atividade e auxilia os alunos na realização de suas próprias descobertas.

Além disso, mostrou-se relevante a integração de recursos digitais, como os aplicativos e softwares, utilizados nas atividades analisadas. A disponibilização desses recursos em sala de aula ou no laboratório de informática instigou os alunos a explorar suas funcionalidades e a atribuir novos significados pedagógicos a instrumentos que já utilizam diariamente, agora direcionados para apoiar suas formações escolares e acadêmicas (Niss; Blum, 2020).

Outro aspecto relevante a ser destacado é o papel da experimentação, que se mostrou essencial para o desenvolvimento e a compreensão do fenômeno analisado. Por meio da experimentação, os estudantes puderam identificar padrões nos dados, contribuir para a formulação de conjecturas matemáticas e avaliar a validade de resultados teóricos, possibilitando a confirmação ou a refutação de hipóteses.

A partir dessas constatações, é importante destacar a sinergia percebida entre a Modelagem Matemática e a Análise de Modelos. Ambas as alternativas pedagógicas, quando trabalhadas individualmente conforme apresentado por Almeida, Silva e Vertuan (2016), e Soares e Javaroni (2013), produzem resultados interessantes. No entanto, a combinação das duas enriquece ainda mais o estudo de um fenômeno, conforme representado na Figura 4 e na Figura 5.

De fato, a análise das atividades revelou que diversas fases dessas alternativas pedagógicas facilitaram a compreensão do problema pelos alunos, que já haviam modelado o fenômeno. Esta constatação é corroborada por Soares e Borba (2011, p. 231), que mencionam a sinergia existente entre essas duas alternativas em seus trabalhos: “[...] a perspectiva de análise de modelos, considera o estudo de um ou mais modelos matemáticos já existentes de um fenômeno, com enfoque na análise do comportamento de suas soluções e da influência dos parâmetros neste

comportamento, e o entendimento dos dados fornecidos pelo modelo com relação ao fenômeno, como ações do fazer modelagem".

Embora a proposta inicial da Análise de Modelos se concentre na análise de modelos matemáticos já prontos, sem que todo o processo de modelagem seja necessariamente vivenciado pelos alunos, entendemos que essa abordagem complementa a atividade de Modelagem Matemática. Na investigação discutida, os alunos tiveram a oportunidade de refletir mais profundamente sobre os dados do experimento e de resgatar ou aprender conceitos de Física mencionados inicialmente ao se depararem com um modelo clássico apresentado pelo professor.

Essa sinergia permitiu que os alunos desenvolvessem, analisassem, comparassem e refinassem um modelo matemático. Isso proporcionou a oportunidade de estudar novos conteúdos matemáticos e de atribuir significado à matemática aprendida em sala de aula mobilizada ao longo do processo.

Assim, espera-se contribuir com a Educação Matemática ao evidenciar como a integração entre Modelagem Matemática e Análise de Modelos pode enriquecer o processo de ensino e aprendizagem. A Modelagem Matemática, ao permitir a representação de fenômenos complexos, e a Análise de Modelos, ao refinar essas representações, promovem uma aprendizagem contextualizada.

Referências

- ALMEIDA, L. W.; DA SILVA, K. P.; BORSSOI, A. **Um estudo sobre o potencial da experimentação em atividades de modelagem matemática no ensino superior.** Quadrante, Lisboa, v. 30, n. 2, p. 123-146, 2021.
- ALMEIDA, L. M. W.; SEKI, J. T. P.; CASTRO, E. M. V. **Tecnologias digitais e modelagem matemática: interlocuções e possibilidades.** Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 2024.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica.** São Paulo: Contexto, 2016.
- ALMEIDA, M. L. W. de; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. **Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes?** Revista Acta Scientiae, Canoas, RS, v. 14, n. 2, p. 200-214, maio/ago. 2012. Disponível em: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/230>>. Acesso em: 20 jul. 2015.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2011.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

BLUM, W.; NISS, M. **Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, applications, and Links to Other Subjects-state, Trends and Issues in Mathematics Instruction.** Educational Studies in Mathematics, v. 22, n. 1, p. 37–68, 1991.

BLOMHØJ, M.; NISS, M. **Decoding, understanding, and evaluating extant mathematical models: what does that take?** Quadrante, Lisboa, v. 30, n. 2, p. 9-36, 2021. Disponível em: <<https://quadrante.apm.pt/article/view/24129/18995>>. Acesso em: 21 jul. 2024.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. **Percepções sobre o uso da tecnologia para a aprendizagem significativa de alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática.** Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, v. 10, p. 36-45, 2015.

GIROTI, N. I. **Modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos: indícios do pensamento matemático avançado no estudo de equações diferenciais ordinárias.** 2024. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

GOWERS, T. **Mathematics: a very short introduction.** Oxford: Oxford University Press, 2002.

GREEFRATH, G. **Using technologies: new possibilities of teaching and learning modelling – overview.** In: KAISER, G. et al. (ed.). Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14. Dordrecht: Springer, 2011. p. 301-304.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica:** possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias. 2007. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2007.

NISS, M.; BLUM, W. **The learning and teaching of mathematical modelling.** Abingdon, Oxon: Routledge, 2020. DOI: <<https://doi.org/10.4324/9781315189314>>.

SEPÚLVEDA, E.; GONZÁLEZ-GÓMEZ, D.; VILLA-OCHOA, J. A. **Analysis of a mathematical model: opportunities for the training of food engineering students.** In: CORREIA, A.; SERUYA, T.; CORTE-REAL, A. (ed.). Improving learning and teaching with educational design. Cham: Springer, 2020. p. 575-588. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-40690-5_49>.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. **Análise de modelos: possibilidades de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula.** In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (org.). Tecnologias digitais e educação matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2013. p. 187-206.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. **Fenômeno biológico, sistema dinâmico e noções de Cálculo I: uma proposta.** In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (org.). Práticas de modelagem matemática na educação matemática. Londrina: Eduel, 2011. p. 227-247.

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. **Modelagem matemática e tecnologias digitais: uma aprendizagem baseada na ação.** Educação Matemática Pesquisa, v. 18, n. 1, p. 421-446, 2016.

SILVA, A. D. P.; et al. **Modelagem matemática e tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.** Tese de Doutorado. Universidade Federal do Oeste do Pará, 2019.

TONIN, E. C. **Análise de modelos em atividades de modelagem matemática com alunos do ensino médio.** 2024. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.