Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino

REPPE

Edição Especial

X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática

Universidade Estadual do Norte do Paraná – Cornélio Procópio (PR), 2024

O ERRO MATEMÁTICO COMO TRAMPOLIM PARA A PESQUISA: POSSIBILIDADES EM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

MATHEMATICAL ERROR AS A SPRINGBOARD FOR INQUIRY: POSSIBILITIES IN A MATHEMATICAL MODELING ACTIVITY WITHIN A PEDAGOGICAL RESIDENCY

Daniela Barbieri Vidotti[1]

Laís Maria Costa Pires de Oliveira[2]

Resumo

O objetivo deste estudo é investigar possibilidades para o uso dos erros matemáticos como *trampolins para pesquisa*, a partir do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática (MM) no contexto do Programa Residência Pedagógica (PRP). Para tanto, descrevemos a dinâmica de trabalho com uma atividade de MM e uma tarefa baseada na Análise de Erros vivenciada pelos participantes do PRP. As análises evidenciaram que, neste processo os participantes assumiram uma estratégia de *Descoberta/conteúdo* e uma postura de *Pesquisa/matemática*. Desse modo, conclui-se que a atividade de MM se mostrou potencial para, por meio da emergência de dúvidas e questionamentos a respeito dos conceitos e estratégias matemáticas mobilizadas, possibilitar o uso do erro matemático como *trampolim para a pesquisa,* apoiando o processo de construção de conhecimentos matemáticos por futuros professores.

Palavras-chave: Análise de Erros; Residência Pedagógica; Ensino de Funções.

[1] Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá e Professora Adjunta do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, *campus* de Paranavaí.

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e Professora Colaboradora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, *campus* de Paranavaí.

Abstract
The aim of this study is to explore possibilities for using mathematical errors as springboards for inquiry, through the development of a Mathematical Modeling (MM) activity in the context of the Pedagogical Residency Program (PRP). To this end, we describe the dynamics of working with an MM activity and the process of creating a task based on Error Analysis experienced by the PRP participants. The analyses showed that, in this process, the participants adopted a Discovery/content strategy and a Inquiry/mathematics approach. Thus, it is concluded that the Mathematical Modeling activity demonstrated potential, through the emergence of inquiries and reflections on the mathematical concepts and strategies explored, to enable the use of mathematical errors as a *springboard* for inquiry, supporting the process of constructing mathematical knowledge by future teachers.

Keywords: Error Analysis; Pedagogical Residency; Teaching of Functions.

Considerações Iniciais

O Programa Residência Pedagógica (PRP) é um programa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, que visa o aperfeiçoamento da formação inicial de professores da Educação Básica nos cursos de licenciatura. No subprojeto de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, uma das ações desenvolvidas para atender a Portaria CAPES/PRP nº 82/2022, foram os encontros de formação realizados presencialmente com os participantes periodicamente na universidade. Foi nesse contexto que esta pesquisa foi desenvolvida, a partir de uma atividade de Modelagem Matemática com um grupo de participantes do PRP, durante os encontros de formação.

O estudo da Modelagem Matemática (MM) enquanto tendência para o ensino da Matemática estava previsto nos referidos encontros, uma vez que os documentos normativos da Educação Básica (Brasil, 2018; Paraná, 2021) defendem que os estudantes devem adquirir macrocompetências para seu desenvolvimento integral, dentre as quais está a MM e, portanto, consideramos importante oferecer uma formação em MM aos futuros professores.

Na disciplina de Matemática é comum que o professor tenha que lidar com os erros cometidos pelos estudantes em suas produções. Logo, é extremamente relevante que este tema seja discutido na formação inicial de professores. Muitas vezes, o erro possui um *status* negativo, pois considera-se que o aluno não conseguiu aprender um determinado conceito ou propriedade quando ele é detectado em suas produções. Contudo, pesquisas têm indicado que é preciso desmistificar esta conotação ruim dada ao erro, uma vez que ele pode denotar um conhecimento que o aluno possui, constituído de alguma forma (Cury, 2008).

Para além disso, os erros matemáticos cometidos pelos estudantes podem ser explorados em sala de aula, por meio de questionamentos realizados pelo professor, tendo como objetivos a pesquisa e a descoberta, o que caracteriza o uso dos erros como *trampolins para pesquisa*[3] (Borasi, 1996; Cury 2008). Assim, pretende-se levar o aluno ao aprofundamento do conteúdo, ou a outras aprendizagens, a partir do próprio erro.

Este estudo é uma versão ampliada do artigo apresentado no X EPMEM, no qual nos propomos a investigar, "que possibilidades para o uso dos erros matemáticos como *trampolins para pesquisa* emergem do desenvolvimento de uma atividade de MM no contexto do PRP?". A fim de responder esta questão apresentamos na sequência algumas considerações sobre o erro e a MM, a descrição de uma atividade de MM, a descrição de uma tarefa envolvendo a Análise de Erros seguida dos resultados e discussões e considerais finais.

A Modelagem Matemática e o Erro como Trampolim para pesquisa

Neste estudo concebemos a MM como "[...] a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (Bassanezi, 2013, p. 16). Nesse processo dinâmico, é fundamental a representação do objeto estudado por meio de um Modelo Matemático, isto é, um conjunto de símbolos ou relações matemáticas formulados de acordo com o fenômeno ou situação analisada. Como forma de encaminhamento de uma atividade de MM, de acordo com Bassanezi (2013), é necessário seguir algumas etapas, denominadas: *Experimentação, Abstração, Resolução, Validação, Modificação e Aplicação*.

Considerando que a MM trabalha com aproximações da realidade e/ou previsão de tendências, é essencial avaliar se o Modelo Matemático obtido é adequado ou não para o contexto em questão. Bassanezi (2013) indica alguns fatores relacionados ao processo de Modelagem Matemática que podem provocar a rejeição do modelo: alguma hipótese assumida pode ser falsa; os dados experimentais podem

[3] No original: Springboards for Inquiry.

ter sido obtidos de forma equivocada; os dados serem insuficientes; as variáveis reais não serem consideradas no momento da simplificação; o *erro no desenvolvimento matemático formal da resolução*, entre outros. Dessa forma, observa-se que há vários motivos que levam a uma previsão equivocada, ou modelo inadequado, na Modelagem Matemática de um problema real.

Neste estudo, discutimos a respeito do erro no desenvolvimento matemático formal, ou seja, *erros matemáticos* identificados nas resoluções produzidas pelos estudantes no processo de Modelagem Matemática os quais “[...] estão em desacordo com as verdades aceitas pela comunidade acadêmica ou pelo professor” (CURY, 1994, p. 99). Dessa forma, queremos evitar ambiguidades relacionadas ao entendimento do que é um erro em MM, uma vez que, as estimativas ou previsões realizadas, por se tratar de aproximações da realidade sempre podem ser melhoradas, ou seja, sempre haverá um percentual de erros.

Da mesma forma que em Vidotti (2019), Vidotti e Kato (2019, 2020) ou Braga (2009) interessa-nos discutir a respeito dos erros matemáticos cometidos pelos estudantes no desenvolvimento de uma atividade de MM, os quais possam ser observados e explorados por eles como um incentivo para novas descobertas.

Nesse sentido, Borasi (1996) e Cury (2008) têm defendido a ideia de que as respostas erradas produzidas pelos estudantes ao resolverem questões matemáticas devem ser exploradas em sala de aula, como *trampolins para pesquisa*, ou seja, oportunidades para gerar dúvidas e questionamentos que conduzam os estudantes a investigações mais aprofundadas e potencializam o processo de construção do conhecimento.

Essa abordagem, propõe uma mudança de postura tanto por parte dos professores quanto dos estudantes diante dos equívocos cometidos durante a aprendizagem. A partir de suas próprias experiências em sala de aula e de análises didáticas variadas, Borasi (1996) investiga como a exploração de um erro matemático pode se transformar em uma estratégia pedagógica eficaz, conduzindo os estudantes a desenvolverem um pensamento matemático mais autônomo e crítico.

Para organizar sua análise, a autora identifica *três níveis do discurso matemático* que influenciam diretamente na forma como os erros podem ser explorados pedagogicamente:

- *Nível de tarefa* – refere-se ao enfrentamento de uma situação matemática concreta, como resolver um problema, realizar um cálculo, elaborar uma demonstração ou propor uma definição. Nesse nível, o erro pode revelar mal-entendidos pontuais ou estratégias de resolução alternativas, possibilitando a reelaboração de procedimentos e a ampliação do repertório de abordagens do aluno.

- *Nível de conteúdo* – neste caso, o erro é relacionado à compreensão de conceitos matemáticos específicos. A análise dos erros nesse nível pode favorecer o aprofundamento do conhecimento conceitual e a percepção de novas perspectivas e conexões a respeito de um conteúdo técnico-matemático.

- *Nível de Matemática* – envolve reflexões mais amplas sobre os modos de produção do conhecimento matemático. A partir da análise dos erros, os estudantes podem discutir aspectos centrais da prática matemática, como a função das definições, a estrutura das provas, o papel dos algoritmos, as estratégias investigativas e os critérios de validade e generalização. Assim, o erro se torna uma via para compreender a própria lógica e os valores da Matemática como ciência.

Essa classificação permite ao educador identificar com mais clareza quais tipos de aprendizagens podem ser mobilizados a partir da análise de um erro específico, e quais estratégias didáticas podem ser empreendidas para que esse momento seja mais profícuo para o aluno.

De forma complementar à distinção entre os níveis do discurso matemático, Borasi (1996) também identificou diferentes *posturas de aprendizagem* que os estudantes podem assumir ao se depararem com erros, independentemente do nível em que esses erros ocorrem. As três posturas são:

- *Postura de remediação:* nessa abordagem, tanto a tarefa quanto sua solução são previamente conhecidas pelo professor, e o estudante já foi informado de que sua resposta está incorreta. O foco, portanto, recai sobre a identificação e correção do erro cometido. Neste caso, a análise dos erros pode contribuir para a compreensão conceitual e o desenvolvimento de estratégias mais eficazes por parte do aluno.

- *Postura de descoberta:* aqui, o aluno está envolvido em um processo de aprendizagem no qual tenta resolver um problema ou explorar um conceito ainda não totalmente dominado. Nesse percurso, pode tomar decisões equivocadas sem perceber que está errando. No entanto, sente-se motivado a submeter sua resposta a uma análise crítica, a fim de verificar sua validade.

- *Postura de pesquisa:* representa a forma mais aberta e investigativa de lidar com os erros. O erro, é visto como um elemento gerador de novas questões, capaz de redirecionar a investigação e impulsionar o aluno a explorar caminhos alternativos e inesperados.

Essas posturas refletem, portanto, diferentes atitudes que podem emergir diante de um erro. A partir desses elementos, Borasi (1996) sugere uma classificação sistemática das diferentes formas pelas quais os erros podem ser explorados pedagogicamente para incentivar a pesquisa e a descoberta em Matemática, conforme apresentamos no Quadro 1:

Quadro 1: Taxionomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa

Postura de Aprendizagem	**Nível de discurso matemático**		
	Realização de uma tarefa matemática específica	**Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático**	**Compreensão sobre a natureza da Matemática**
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso. (Remediação/tarefa)	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático. (Remediação/conteúdo)	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de conteúdos específicos. (Remediação/Matemática)
Descoberta	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar erros potenciais. (Descoberta/tarefa)	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc. (Descoberta/conteúdo)	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático. (Descoberta/Matemática)
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas. (Pesquisa/tarefa)	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original. (Pesquisa/conteúdo)	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a insights e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático. (Pesquisa/Matemática)

Fonte**:** Borasi (1996, p. 138, tradução de Vidotti, 2019)

De acordo com essa taxionomia, foram identificadas nove diferentes variações dos usos dos erros como *trampolins para pesquisa*, que dependem da postura de aprendizagem assumida pelo estudante (remediação, descoberta, pesquisa) e do nível do discurso matemático empreendido na atividade (tarefa, conteúdo, matemática), os quais implicam em diversas oportunidades de aprendizagens.

Assente nesse referencial, analisamos uma atividade de MM desenvolvida no contexto do PRP e apresentamos os encaminhamentos realizados no intuito de levar os participantes a explorarem um erro matemático cometido por um dos grupos na atividade de MM, como *trampolim para pesquisa*.

Encaminhamentos Metodológicos

Este estudo qualitativo, de cunho interpretativo foi desenvolvido no contexto do PRP, com um grupo de (seis) residentes e (uma) preceptora deste programa, no qual as autoras do texto atuavam como docentes orientadoras (oficial e voluntária, respectivamente). Com o intuito de iniciar estudos sobre a MM no âmbito da Educação Matemática optamos por desenvolver uma atividade sobre a temática "inserção de mulheres no mercado de trabalho" adaptada de Senes, Braz e Barros (2022), conforme apresentada no Quadro 2:

Quadro 2: Atividade: Inserção de mulheres no mercado de trabalho

1. Quais são os cargos trabalhistas ocupados pelas mulheres de sua família?
2. Analise a tabela 1 e compare a participação de mulheres e homens no Mercado de Trabalho no decorrer dos anos.

Tabela 1 – Participação de homens e mulheres no mercado brasileiro

Ano	% de homens	% de mulheres
1970	71,8%	18,5%
1980	72,4%	26,6%
1990	72,3%	34,6%
2000	69,6%	44,1%

Fonte**:** Senes, Braz, Barros (2022, p. 161)

3. Como podemos estimar a quantidade de mulheres inseridas no mercado de trabalho atualmente?

Fonte: adaptada de Senes, Braz e Barros (2022)

A atividade foi desenvolvida e discutida em dois encontros de 3 horas-aulas, nos quais os participantes foram subdivididos em dois grupos de trabalho, denominados G1 e G2. No primeiro encontro os grupos resolveram a atividade do Quadro 2 e explanaram suas soluções para a turma. No segundo encontro as docentes orientadoras propuseram uma tarefa envolvendo a Análise dos Erros cometidos pelos participantes nas produções do encontro anterior.

Neste estudo analisamos os registros escritos produzidos pelos grupos e as anotações das docentes orientadoras a respeito dos encaminhamentos e discussões ocorridos no desenvolvimento da atividade (Quadro 2) e a partir dela. A análise destes registros embasou-se nos estudos de Borasi (1996) acerca dos usos dos erros como *trampolins para pesquisa.*

Inserção de mulheres no mercado de trabalho: descrição da atividade

No primeiro momento, como forma de convite à exploração do tema, solicitamos que os participantes comentassem sobre quais foram os cargos trabalhistas ocupados pelas mulheres de sua família. De forma geral, foi relatado que as mulheres se dedicavam aos cuidados familiares e à organização da casa, ou a pequenos empreendimentos, enquanto alguns poucos participantes comentaram sobre mulheres, mães e avós, que trabalharam na licenciatura.

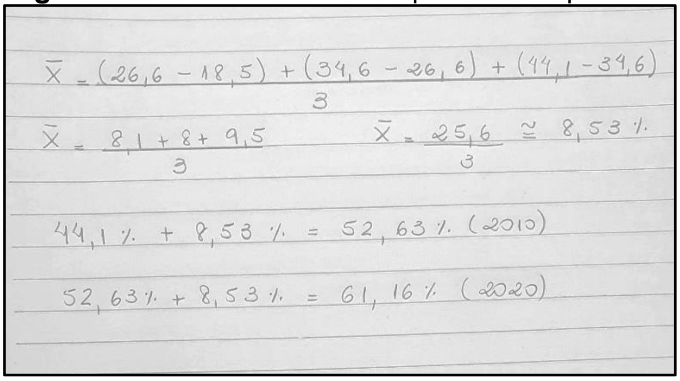
Em seguida, apresentamos aos participantes a Tabela 1 (Quadro 2) que indica a porcentagem de participação de homens e de mulheres no mercado de trabalho brasileiro no decorrer das décadas de 1970 a 2000. Solicitamos que os participantes analisassem esses dados, momento em que perceberam que o percentual de mulheres inseridas no mercado de trabalho, embora crescente, era muito inferior ao percentual de homens, no mesmo período. Nesse contexto, propusemos o seguinte problema: *Como podemos estimar a quantidade de mulheres inseridas no mercado de trabalho atualmente?*

Neste momento, os participantes foram subdivididos em dois grupos de trabalho (G1 e G2). Apresentamos neste texto as resoluções produzidas pelo G1 apenas, pois consideramos os erros cometidos por este grupo posteriormente, na proposição da tarefa envolvendo a Análise de Erros.

Inicialmente, G1 tentou resolver o problema utilizando uma média dos percentuais de mulheres no mercado de trabalho (Tabela 1), assumindo a hipótese de que o crescimento com o passar das décadas era linear.

Conforme podemos observar na Figura 1, o crescimento médio do percentual de mulheres inseridas no mercado de trabalho em cada década determinado pelo grupo foi de 8,53%. Desta forma, somando o percentual referente ao ano 2000 (44,1%) os participantes estimaram que na década seguinte, em 2010, haveria aproximadamente 52,63% das mulheres inseridas no mercado de trabalho. Utilizando a estratégia de recorrência, somando 8,53% à 52,63%, indicaram que na década de 2020 o percentual correspondente às mulheres seria de 61,16%. No entanto, o grupo não precisou a estimativa para o ano corrente, 2023.

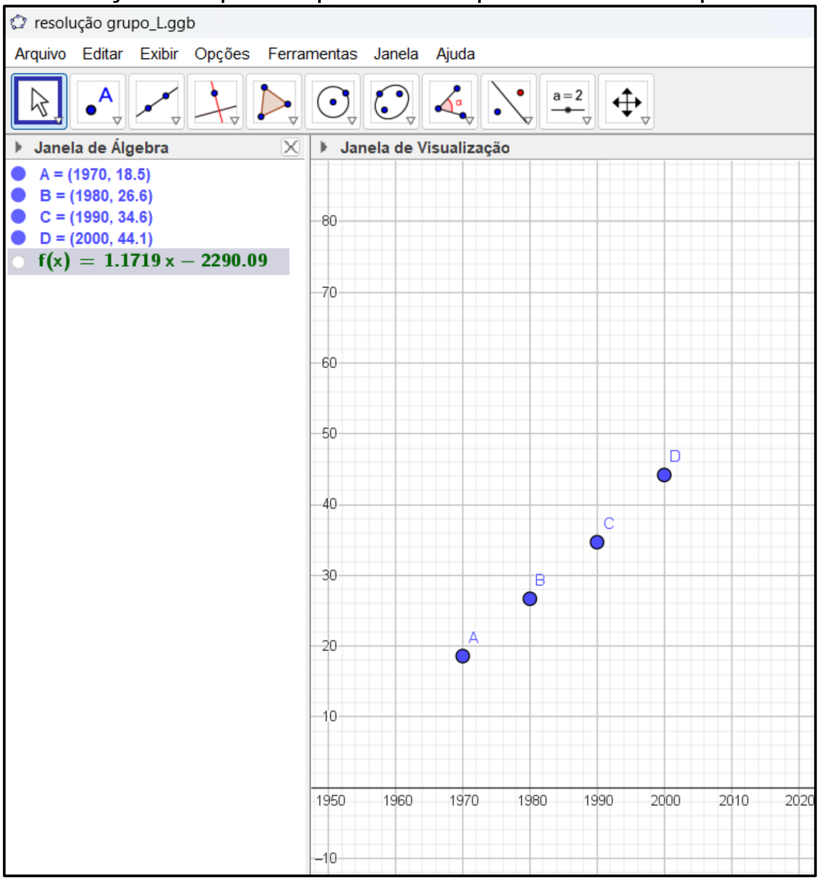
Figura 1: Primeira estimativa apresentada pelo G1



Fonte**:** registro dos participantes

Contudo, não satisfeitos com a resposta obtida para a década de 2020, talvez por influência do outro grupo, G2, que discutia a possibilidade de configurar uma função que representasse os dados referente às mulheres, na Tabela 1, o G1 calculou outra estimativa, agora com auxílio do software Geogebra. Assim, os integrantes do G1, selecionaram novas variáveis para o problema, considerando os anos 1970, 1980, 1990 e 2000 como abscissas das coordenadas cartesianas e os respectivos percentuais de mulheres, como ordenadas (Figura 2).

Figura 2: Representação dos pontos plotados no plano cartesiano por meio do Geogebra

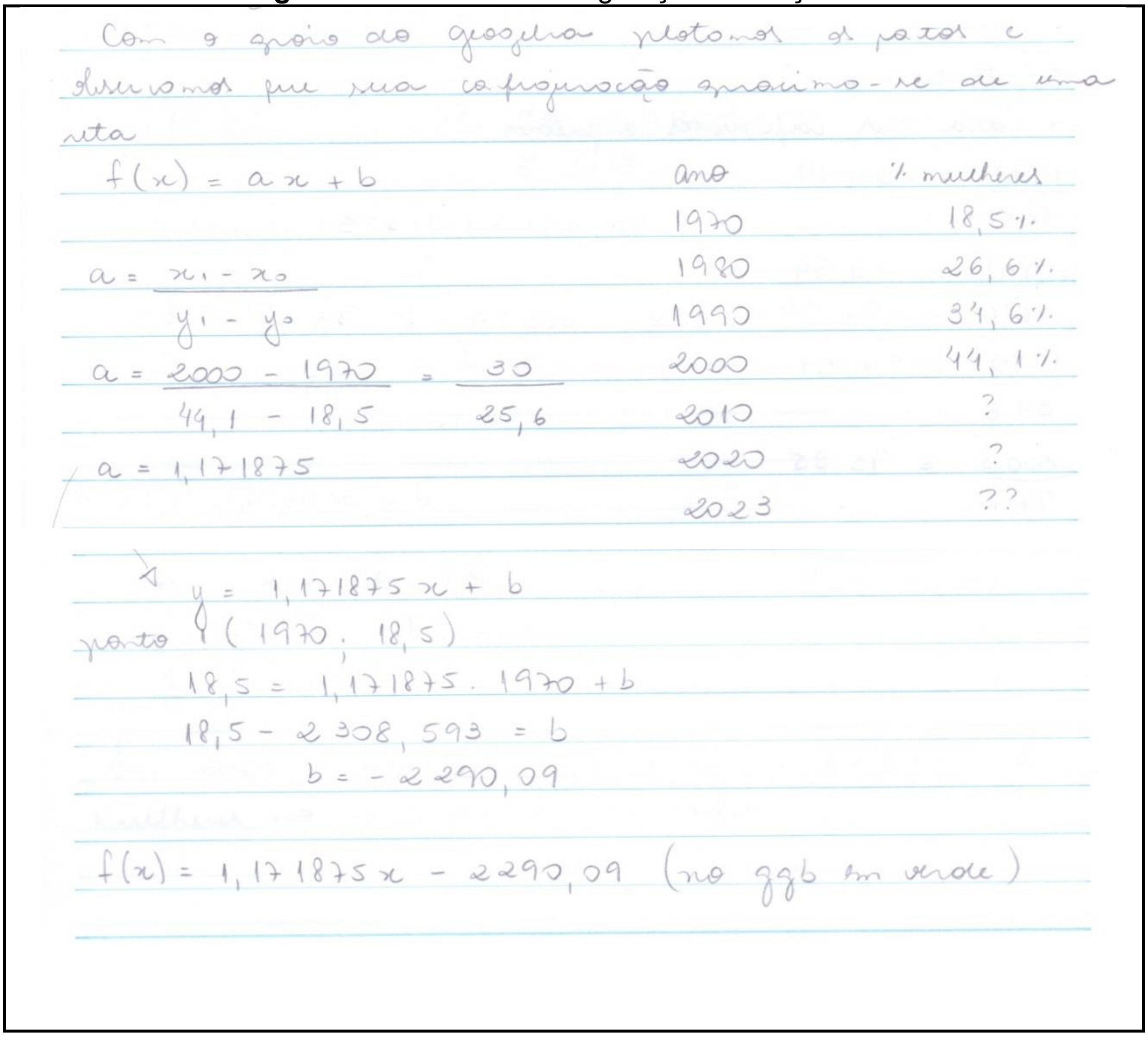


Fonte**:** elaborado pelos participantes

Observando a disposição dos pontos (A, B, C e D), o grupo levantou a hipótese de que a configuração obtida se aproximava de uma reta, e, portanto, o modelo matemático poderia ser obtido pela fórmula geral da função afim: $f(x) = ax + b$, em que a representa o coeficiente angular e b, o coeficiente linear da reta.

Desse modo, o próximo passo do grupo foi determinar o coeficiente angular da reta. Contudo, ao escrever uma fórmula para determinar o valor de a, o grupo considerou: $a = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$ ao invés de $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ (Figura 3).

Figura 3: Cálculos da configuração da função afim



Com o apoio do geogebra plotamos os pontos e observamos que sua configuração aproxima-se de uma reta

$f(x) = ax + b$

ano	% mulheres
1970	18,5 %
1980	26,6 %
1990	34,6 %
2000	44,1 %
2010	?
2020	?
2023	??

$a = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$

$a = \frac{2000 - 1970}{44,1 - 18,5} = \frac{30}{25,6}$

$a = 1,171875$

$y = 1,171875x + b$

ponto $(1970; 18,5)$

$18,5 = 1,171875 \cdot 1970 + b$

$18,5 - 2308,593 = b$

$b = -2290,09$

$f(x) = 1,171875x - 2290,09$ (no ggb em verde)

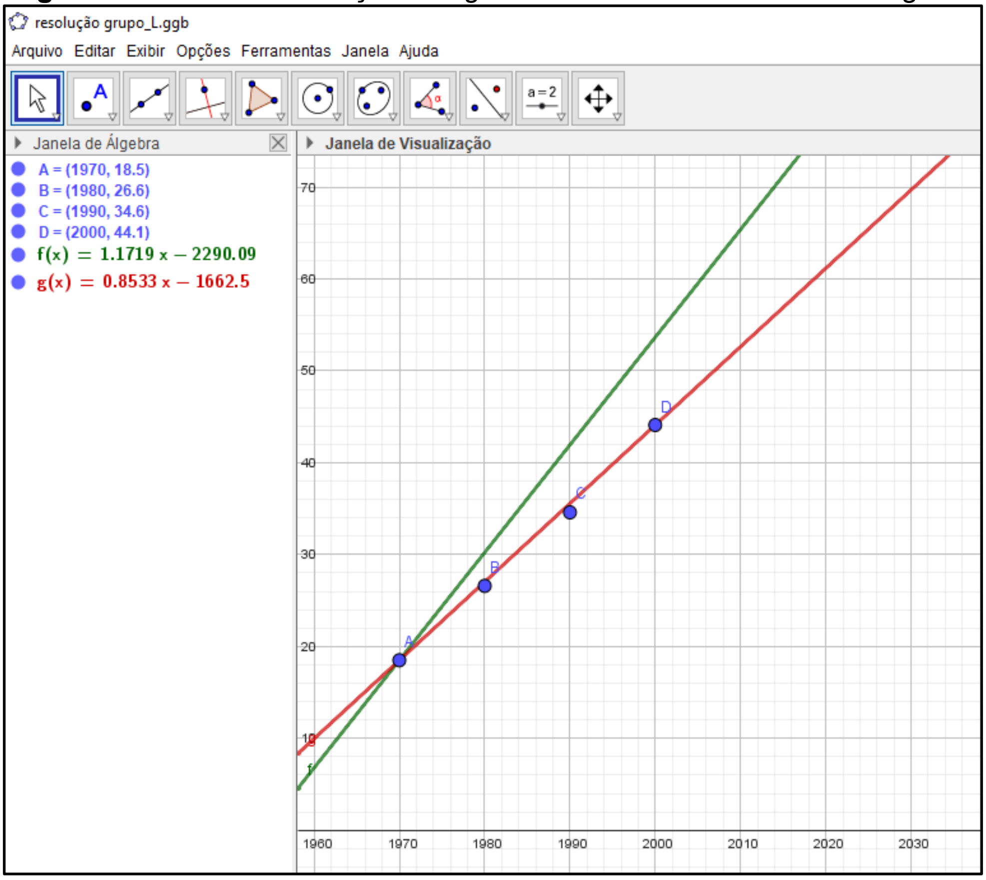
Fonte: registro dos participantes

Ao substituírem (x_0, y_0) por $(1970;\ 18,5)$ e (x_1, y_1) por $(2000; 44,1)$, na relação que assumiram para o cálculo do coeficiente a, G1 obteve $a = 1,171875$. Na sequência, eles calcularam o coeficiente linear b, substituindo o ponto de coordenadas

$(1970; 18{,}5)$ e o valor de a, na fórmula geral da função afim, obtendo $f(x) = 1{,}171875x - 2290{,}09$ (Figura 3).

Porém, para validar o modelo obtido, G1 inseriu a função no campo de entrada do Geogebra, e a plotagem do gráfico evidenciou que a reta ficava distante dos pontos utilizados para a construção do modelo, logo não poderia ser uma configuração satisfatória (Figura 4).

Figura 4: Gráficos das funções *f* e *g* construídas com auxílio do Geogebra



Fonte: elaborado pelos participantes

Ao recorrerem às ferramentas do software, a análise bivariada dos pontos inseridos também gerou uma função afim (função *g* representada em vermelho na Figura 4) distante da função configurada (função *f* representada em verde na Figura 4).

Sem compreender o motivo da discrepância, o grupo solicitou apoio da docente orientadora (primeira autora deste trabalho), que ao avaliar os cálculos percebeu o equívoco na fórmula do coeficiente angular da reta. Corrigindo o cálculo do coeficiente angular, obtém-se $a = 0{,}853$ e a função afim será $f(x) =$

$0{,}853x - 1.661{,}91$, muito próxima da função obtida pela Análise Bivariada feita no Geogebra (reta exibida em vermelho na Figura 4). Assumindo o modelo construído, uma estimativa para o problema em questão pode ser obtida calculando $f(2023)$ que é igual a $63{,}7\%$.[4]

Embora satisfeitos com a resposta dada ao problema, o grupo ficou instigado com o fato de terem assumido (equivocadamente e, como primeira resposta), como coeficiente angular da reta um valor inversamente proporcional ao coeficiente angular do modelo final, matematicamente coerente com a situação problema. Considerando que as duas retas (em verde e em vermelho na Figura 4) passam pelo ponto $A = (1970; 18{,}5)$, e possuem coeficientes angulares inversamente proporcionais, geometricamente qual seria relação entre elas? Porque o coeficiente angular de uma reta é definido por $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, e não por $a = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$? Essas questões instigaram as docentes orientadoras a elaborarem e a proporem uma tarefa, para um próximo encontro, envolvendo a Análise de Erros.

(Re) definindo a inclinação e a equação da reta

Na perspectiva da Análise de Erros, considera-se que um erro cometido por um estudante pode se transformar em um problema (ou tarefa), de modo que a pesquisa e a descoberta favoreçam a ampliação de conhecimentos matemáticos. Borasi (1996) sugere convidar os estudantes a assumirem os seus erros, aceitando-os, e a investigar as consequências (matemáticas) de aceitar o erro como verdade. Nesse sentido, partimos dos seguintes questionamentos: *Sendo $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ dois pontos de uma reta não-vertical, e se definíssemos a inclinação da reta como sendo o número $a = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$? Quais as consequências de aceitar essa definição?*

Para apoiar a investigação, pesquisamos em Boulos (1999, p. 16, grifo do autor) a seguinte definição “Sendo $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos de uma reta não-vertical, a *inclinação* (ou *declividade* ou *coeficiente angular*) da reta é o número m dado por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.” Além disso, observamos que conhecendo o coeficiente angular da reta m e um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ pertencente a ela, podemos definir sua

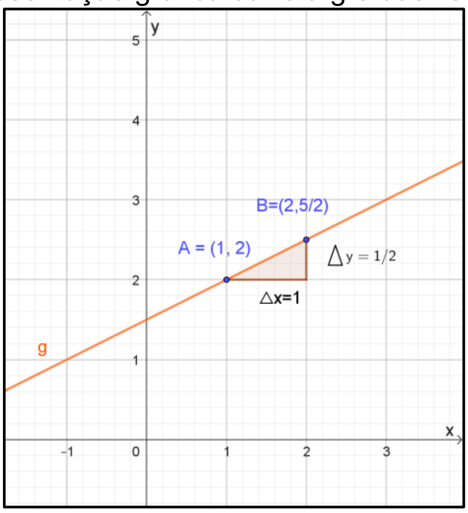
[4] Vale destacar que as docentes orientadoras optaram por discutir somente na plenária final, sobre a possibilidade de substituir os anos 1970, 1980, 1990, 2000..., por n =1, 2, 3, 4..., no modelo matemático como forma de simplificá-lo, uma vez que o G2 fez essa substituição.

equação. Para isso substituímos na fórmula do coeficiente angular o ponto conhecido $P_0 = (x_0, y_0)$ e um ponto $P(x, y)$ genérico, também pertencente a reta e obtemos $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, isto é, $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Considerando o exposto no parágrafo anterior, reformulamos a questão inicial para propor aos alunos da seguinte maneira: *considerando a inclinação da reta como sendo o número* $a = \frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}$, *(re)defina a equação que passa pelo ponto* $P_0 = (x_0, y_0)$ *e tem inclinação* a. Para resolvê-la substituímos na fórmula de a o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e um ponto $P(x, y)$ genérico, também pertencente a reta e obtivemos $a = \frac{x-x_0}{y-y_0}$, ou seja, $(y - y_0)a = x - x_0$.

Na sequência, consideramos propor um exemplo com valores numéricos para esta equação. Então elaboramos a questão: *Considerando a inclinação da reta como sendo dada pelo número* $a = \frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}$ *, dê uma equação da reta g que passa pelo ponto* $A = (1, 2)$ *e que tem inclinação* $a = 2$. Com as substituições necessárias, obtemos $g: y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$. Ao considerar a equação encontrada, questionamos: *quando* $\Delta x = 1$, *qual será o valor da variação* Δy? Como $\Delta x = x_1 - x_0$ ao considerar $x_0 = 1$ naturalmente $x_1 = 2$. Substituindo x_1 na equação g, temos $y_1 = \frac{5}{2}$. Desse modo, temos que $\Delta y = y_1 - y_0 = \frac{1}{2}$. Assim, quando x varia uma unidade, temos que a variação de y é $\frac{1}{2}$ unidade. Uma representação gráfica da reta g e das variações Δx e Δy calculadas podem ser vistas na Figura 5.

Figura 5: Representação gráfica da reta g e das variações Δx e Δy



Fonte: elaborado pelas autoras

Desse modo, observamos que, considerando a “inclinação da reta” sendo $a = 2$, obtemos $\Delta y = \frac{1}{2}$ para cada unidade de variação de *x*. A partir disso, questionamos se podemos generalizar este resultado para qualquer reta, ou seja, *considerando a “inclinação da reta” sendo* a, *para* $\Delta x = 1$ *teremos sempre que* $\Delta y = \frac{1}{a}$? Para confirmar a afirmação, consideramos a fórmula $a = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$, e substituímos $x_1 - x_0 = 1$, resultando em $y_1 - y_0 = \frac{1}{a}$, como queríamos.

Definir a inclinação de uma reta por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, significa que, em qualquer reta que possui tal inclinação, quando x varia uma unidade, então y varia m unidades. Assim, ao definirmos a inclinação de uma reta por $a = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$, isto é, $a = \frac{1}{m}$, é de se esperar que alteramos também a variação de *y* para $m = \frac{1}{a}$ unidades.

O intuito das professoras orientadoras com as questões apresentadas neste breve estudo, era possibilitar aos futuros professores descobrirem e compreenderem as consequências de (re)definir a inclinação da reta da mesma forma como foi definida e utilizada pelo G1. Esta proposta de tarefa com Análise de Erros, foi implementada com o grupo de residentes em encontro posterior, no qual retomamos a atividade sobre a inserção de mulheres no mercado de trabalho, expusemos o erro cometido por G1 em sua estratégia de resolução e discutimos com todos os participantes sobre o quanto é importante considerar e questionar as respostas dadas pelos estudantes para construirmos conhecimentos matemáticos.

Dessa forma, o desenvolvimento da tarefa com futuros professores possibilitou a todos retomarem o estudo da equação da reta, e (re)significarem a definição do coeficiente angular.

Resultados e Discussões

Conforme pudemos observar na descrição da atividade “Inserção das mulheres no mercado de trabalho”, a escolha do tema e a definição do problema foram realizadas pelas docentes orientadoras, cabendo aos demais participantes dos encontros formativos percorrerem as etapas da MM na busca por uma estimativa para o problema proposto.

Deste modo, consideramos que a etapa de *Experimentação* aconteceu quando os participantes interpretaram os dados da Tabela 1, percebendo que o percentual de mulheres inseridas no mercado de trabalho, embora crescente, era inferior ao percentual de homens, no mesmo período, pois neste momento, reconheceram os dados com os quais deveriam trabalhar. A etapa de *Abstração* ocorreu à medida em que selecionaram as variáveis x (tempo) e y (porcentual de mulheres) do problema, e traçaram algumas hipóteses, como: o crescimento do percentual de mulheres com o passar do tempo era linear e poderia ser representado por uma reta.

Observamos a etapa da *Resolução* na determinação de uma função afim que representava os dados do problema. E a *Validação* ocorreu quando os estudantes avaliaram a adequação do modelo obtido. De acordo com Bassanezi (2013, p. 30) "um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram." E na atividade em questão, o modelo não foi aceito, pois a previsão para os fatos originais foi considerada distante da realidade dos dados, para os participantes. Nesse momento, eles decidiram traçar outra estratégia, recorrendo ao Geogebra para gerar outro modelo. Observando que o modelo obtido com auxílio do Geogebra tratava-se de uma função afim, e que representava bem os dados da Tabela 1, produzindo aproximações aceitáveis, o grupo questionou-se a respeito do motivo pelo qual o modelo elaborado por eles, sem o auxílio do Geogebra, apresentava-se geometricamente tão distante do modelo obtido com auxílio do software.

Ao rever os registros escritos junto com a docente orientadora, perceberam que houve um *erro matemático* na fórmula do coeficiente angular da reta. De acordo com a taxionomia dos usos dos erros descritas por Borasi (1996) (Quadro 1), inferimos que neste momento os participantes junto com a docente orientadora assumiram uma *Postura de Descoberta*, pois na tentativa de resolver o problema proposto, sentiram-se motivados a examinar criticamente suas estratégias para determinar se estavam corretas ou não. Nesse movimento, perceberam um erro na fórmula utilizada para determinar o coeficiente angular da reta, portanto, atuavam em *Nível de Conteúdo,* que os conduziram a refletir sobre a definição de coeficiente angular. Assim, os participantes assumiram a estratégia de *Descoberta/conteúdo* nesse episódio.

Além disso, quando resolvemos investigar as consequências de aceitar a *fórmula errada* do coeficiente angular como uma *verdade*, vemos na prática que "*Erros e resultados intrigantes <u>motivam questões</u> que podem levar a insights e perspectivas* *inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático*". (Borasi (1996, p. 138, tradução nossa, grifo nosso). Nesse episódio, evidencia-se uma postura de *Pesquisa*, ao configurar-se uma nova tarefa, a partir de um erro cometido pelo G1, que pudesse levar os participantes a explorarem com profundidade o conceito de inclinação da reta, a fim de compreenderem o seu significado prático e a viabilidade de estabelecer outra fórmula que a definisse, sendo assim, o nível do discurso matemático empreendido foi de *Matemática*.

Considerações Finais

A partir de uma vivência com uma atividade de MM, no contexto formativo do PRP, foi possível observar que as possibilidades de usos dos erros matemáticos emergentes corroboram com as pesquisas de Vidotti (2019) e Vidotti e Kato (2019, 2020), legitimando o potencial da MM para promover situações nas quais os *erros matemáticos* possam ser observados e explorados por futuros professores como *trampolins para pesquisa*. Nesse sentido, identificamos que a atividade de MM instigou os participantes a assumirem posturas de *Descoberta/Conteúdo* e de *Pesquisa/Matemática*.

Essas possibilidades de usos dos erros como trampolins para pesquisa identificadas, implicam em diferenças em termos de oportunidades de aprendizagem[5] que elas podem propiciar. No primeiro episódio (descoberta/conteúdo), destacamos que os participantes puderam "Vivenciar dúvidas e conflitos construtivos em relação às questões matemáticas (Borasi, 1996, p. 143)", uma vez que tentaram compreender o motivo da solução feita por eles estar distanciando-se dos dados do problema, expostos na Tabela 1, a partir do erro na fórmula do coeficiente angular. Além disso, no segundo episódio (Pesquisa/Matemática), os participantes tiveram a oportunidade de "Refletir sobre a natureza da matemática (Borasi, 1996, p. 145)", pois foram instigados analisar a viabilidade de estabelecer uma outra forma de definir um objeto matemático, neste caso, a de inclinação da reta.

Acrescenta-se neste estudo, a proposição de uma tarefa no qual permite-se questionar a respeito de uma verdade aceita pela comunidade Matemática, a fim de ampliar o significado prático do conceito de coeficiente angular da reta. Nesse

[5] Neste estudo compreende-se aprendizagem como um processo gerador de significado.

movimento, de pensar em uma tarefa como intervenção a um erro matemático cometido por um dos grupos de participantes, no qual reportamo-nos aos estudos de Borasi (1996), reiteramos a importância de se explorar ao máximo o potencial de um erro cometido pelos estudantes para produzir conhecimentos. Dessa forma, consideramos que esta seja uma possibilidade de trabalho profícua para fomentar discussões acerca de conceitos relacionados às funções, e uma proposta de prática possível e acessível para a sala aula.

Referências

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2013.

BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction:** a focus on erros. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BRAGA, R. M. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias**. 2009. 180 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CURY, H. N. **As concepções matemáticas dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos.** 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial curricular para o ensino médio do Paraná**. Curitiba: SEED/PR., 2021.

SENES, G. G. P.; BRAZ, B. C.; BARROS, M. C. Lugar de mulher é onde ela quiser. In: KATO, L. A. et al (Orgs.). **Conversas com quem gosta de Modelagem Matemática**. Ponta Grossa: Texto e Contexto, 2022, p. 158-173.

VIDOTTI, D. B. **Potencialidades da modelagem matemática e da análise de erros para o ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral em várias variáveis**. 2019. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2019.

VIDOTTI, D. B.; KATO, L. A. O uso de erros matemáticos ocorridos no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem como um incentivo para novas descobertas. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2019, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UFMG/SBEM, 2019. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/ocs/index.php/cnmem/2019/paper/viewFile/774/924. Acesso em: 16 jul. 2024.

VIDOTTI, D. B.; KATO, L. A. Oportunidades de aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral em uma atividade de Modelagem Matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 40, n. 1, p. 45-61, jan./jun. 2020. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/3052/2523. Acesso em: 16 jul. 2024.