

Edição Especial

X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
Universidade Estadual do Norte do Paraná – Cornélio Procópio (PR), 2024

**MODELOS MATEMÁTICOS PRODUZIDOS POR CRIANÇAS
DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**
*MATHEMATICAL MODELS PRODUCED BY STUDENTS IN THE EARLY YEARS
OF ELEMENTARY SCHOOL*

Débora da Rocha de Paula Santos¹
Michele Regiane Dias Veronez²
Ana Paula Zanim³

Resumo

Este artigo discute acerca dos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com vistas a identificar características desses modelos. O quadro teórico a partir do qual a análise foi realizada considera a modelagem matemática como alternativa pedagógica. Uma pesquisa empírica em que crianças de uma turma de 4º ano de uma escola pública municipal localizada no centro-oeste do Paraná, desenvolveram atividades de modelagem com temas: "Gestão de frutas na escola" e "Organização da saída escolar em dias de chuva" subsidia as análises desse estudo, que tem caráter qualitativo. Destacamos que os modelos matemáticos emergem não como respostas prontas, mas como construções progressivas, moldadas pelas investigações conduzidas pelas próprias crianças, mediadas pela escuta da professora. Ao organizarem os dados em tabelas, representarem as estruturas em desenhos ou justificarem cálculos em linguagem natural, os modelos não se limitam a representar uma solução, mas atuam como ferramentas que possibilitam o raciocínio, a comparação, a tomada de decisão e a comunicação matemática no coletivo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Tipos de modelos; Anos Iniciais.

¹ Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

² Doutorado e Professora na Universidade Estadual do Paraná – Campus de Apucarana.

³ Doutorado e Professora na Universidade Estadual do Paraná – Campus de Apucarana.



Abstract

This article discusses the mathematical models produced by children in the early years of elementary school, aiming to identify the characteristics of these models. The theoretical framework from which the analysis was conducted considers mathematical modeling as a pedagogical alternative. Empirical research in which children from a 4th-grade class in a municipal public school located in the central-west region of Paraná developed modeling activities on the themes: "Fruit management at school" and "Organization of school departure on rainy days" supports the analyses of this qualitative study. We emphasize that mathematical models emerge not as ready-made answers, but as progressive constructions, shaped by the investigations conducted by the children themselves, mediated by the teacher's listening. By organizing data in tables, representing structures in drawings, or justifying calculations in natural language, the models are not limited to representing a solution, but act as tools that enable reasoning, comparison, decision-making, and mathematical communication within the group.

Keywords: Mathematical Modelling; Types of models; Early Years.

Introdução

O acesso a contextos reais é viabilizado às crianças, na escola, desde à Educação Infantil. Contudo, é nos Anos Iniciais que as crianças vão constituindo, gradualmente, a maturidade necessária para lidar com tais contextos, principalmente, se são provocadas a refletir acerca deles. Tal reflexão, no entanto, quando realizada a partir de lentes da matemática, sugere como possibilidade que o ensino seja sustentado por propostas da Educação Matemática, entre elas a modelagem matemática, que se apresenta como uma alternativa para abordar situações reais. Essa tendência, de modo geral, é compreendida como uma possibilidade de aproximação entre realidade e matemática.

De acordo com Niss (2015), o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática tem por finalidade a representação e/ou compreensão de fenômenos e situações extra matemáticas. Nesse sentido, no âmbito da Educação Matemática, a modelagem matemática pode “viabilizar uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de fenômenos do mundo ou da vida, muitas vezes identificados fora do ambiente escolar, com o apoio da matemática” (Almeida; Silva; Veronez, 2015, p. 3).

Sendo a modelagem matemática uma alternativa pedagógica que associa contextos reais à Matemática, ela pode ser um caminho para a abordagem de aspectos da realidade em associação com conhecimentos de diversas naturezas,

sobretudo, conhecimentos matemáticos. Assim, nas práticas de modelagem matemática as crianças podem explorar situações cotidianas, mobilizar conhecimentos diversos e viver experiências que favorecem a exploração de conceitos matemáticos. Tortola (2016) é um dos autores que sugere a implementação da modelagem matemática no contexto escolar desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental ao enfatizar que ela pode contribuir no desenvolvimento de habilidades necessárias para a resolução de problemas, tais como analisar dados, levantar hipóteses, produzir informações, formular e avaliar modelos matemáticos, além de revisar e ajustar soluções quando necessário.

Uma característica das atividades de modelagem matemática é que o problema emerge de uma situação real, que pode ser do interesse dos alunos, ou até mesmo, ser proposto por elas. Contudo, os dados para resolver o problema não estão explícitos; eles precisam ser compreendidos no contexto da situação em foco. Com isso, as crianças precisam desenvolver autonomia ao longo de todo o processo que envolve a resolução do problema. A implementação de atividades de modelagem matemática com as crianças também permite com que elas ampliem seu modo de compreender a matemática, desmistificando a crença de que a matemática é apenas uma ciência objetiva e inquestionável (Maaß, 2005).

É notável, na literatura, o número de estudos que abordam modelagem matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Dentre os enfoques abordados, há estudos que discutem aspectos sobre o desenvolvimento de práticas de modelagem matemática em sala de aula (English, 2003; English; Watters, 2004), outros que olham para os discursos produzidos pelas crianças (Luna; Souza; Santiago, 2009) e outros para a formação de professores que atuam nos anos iniciais (Gomes; Silva, 2021; Teodoro, 2018). Também há estudos que discutem sobre modelagem matemática atrelada a outros referenciais teóricos (Tortola, 2012; Nunomura, 2021) e, aqueles que discutem sobre a construção de modelos matemáticos (English, 2010; Tortola; Silva, 2021).

Como a atividade de modelagem matemática consiste na atividade de busca, por meio da matemática, por uma solução para um problema não matemático e o modelo matemático, é o que dá ‘forma’ a essa solução (Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Almeida, Tortola e Merli, 2012), a produção de modelos matemáticos é uma ação importante. Quando as crianças têm oportunidades de discutir acerca de situações de seu interesse elas podem se envolver na produção de “uma diversidade de estruturas

matemáticas que podem contribuir para a observação das regularidades e generalização da situação, assim como podem constituir o ponto de partida para a discussão de relações entre diferentes situações" (Tortola, 2016, p. 263).

Particularmente, a produção de modelos matemáticos é um aspecto que também nos interessa e, por esse motivo, nos ocupamos de discutir acerca dos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com vistas a identificar características desses modelos. Estudos acerca de modelos matemáticos já foram investigados por Almeida, Tortola, Merli, (2012); Barbosa, (2009); Doerr, English, (2003); Lesh, Carmona, Hjalmarson, (2006); Sousa, Tortola, (2021); Tortola, Silva, (2021), os quais subsidiam nossas reflexões.

Com relação ao objetivo supracitado focalizamos os modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais em duas atividades de modelagem matemática por eles desenvolvidas, a saber: "Gestão de frutas na escola" e "Organização da saída escolar em dias de chuva". Em nossa análise consideramos a classificação de modelos matemáticos indicada por Tortola (2016). O processo analítico que subsidia nossas observações e inferências segue pressupostos da abordagem qualitativa de pesquisa e tem caráter interpretativo.

Este artigo corresponde a uma ampliação e aprimoramento de uma comunicação científica apresentada no X Encontro Paranaense de Modelagem Matemática. As reflexões aqui desenvolvidas foram aprofundadas, com revisões teóricas e metodológicas, além da inclusão de novos dados e análises.

Os modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática: compreensões e possíveis configurações no âmbito dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

A modelagem matemática na sala de aula constitui uma alternativa pedagógica, ou seja, uma possibilidade para relacionar matemática escolar com situações extra matemáticas que podem ser de interesse das crianças. Essa relação entre áreas distintas permite que a atividade de modelagem matemática seja descrita "em termos de uma situação inicial (problemática) e de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação problema) e de um conjunto de procedimentos", conforme nos apresenta Almeida, Silva, Vertuan (2012, p.12). Esse conjunto de procedimentos se associa à busca por informações, identificação e

seleção de variáveis, elaboração de hipóteses, simplificações, construção de um modelo matemático e interpretação da solução bem como a sua comunicação para outros e se processa nas fases da modelagem matemática, a saber: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Na fase inteiração ocorre o contato inicial com a situação-problema que será investigada. É o momento de coleta de dados quantitativos e qualitativos, da formulação do problema e da definição de metas para a sua resolução (Almeida; Silva; Vertuan, 2012). Na matematização, ocorre o processo de transição dos dados da situação-problema para a linguagem matemática, por meio de simplificações, seleção de variáveis e formulação de hipóteses que evidenciam o problema matemático a ser resolvido. Na fase resolução é obtido um modelo matemático que descreve a situação, também pode acontecer a aprendizagem dos conteúdos inerentes à problemática. A interpretação de resultados e validação, “visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, o desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações” (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p.16).

De modo geral, o processo de busca por solução para o problema em estudo é regido por um modelo matemático, que segundo Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006) consiste em um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e, em alguns casos, permitir a realização de previsões sobre este.

Como modelos matemáticos servem para descrever ou explicar comportamentos de fenômenos ou outros sistemas, eles carregam especificidades da situação em foco. Para Almeida; Silva; Vertuan (2012), assim como para Almeida, Tortola e Merli (2012) “a modelagem matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos e, portanto, o modelo matemático, “é o que ‘dá forma’ à solução do problema” (p. 217). Doerr e English (2003) esclarecem que a representação matemática, que expressa as relações matemáticas presentes na situação-problema do mundo real e possibilita a produção de uma resposta para o problema, é caracterizada como modelo matemático.

Para D'Ambrosio (2009, p. 92),

a utilização de modelos matemáticos depende do conhecimento dos fatos e fenômenos, do comportamento reconhecível dos objetos reais e sistemas, normalmente expressos por leis, em sua maioria derivadas empiricamente. Para lidar e tirar benefícios a partir de modelos matemáticos, ferramentas intelectuais são fornecidas pela matemática, considerada um corpo de conceitos e teorias e as regras operacionais para lidar com eles.

Em Araújo, Freitas e Silva (2011, p. 144), os autores associam ao termo modelo matemático a expressão “matemática é posta em ação” e deixam implícito que os modelos matemáticos se configuram teoremas, utilização de algoritmos, aplicação de conteúdos matemáticos, meios para refletir sobre a matemática e sobre a situação em estudo. Nesse mesmo sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2012), colocam que o “modelo” é caracterizado como a “representação de alguma coisa”, acrescentando que um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 13).

Quando a modelagem matemática é discutida nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a configuração de modelo matemático ganha algumas especificidades. Doerr e English (2003) nos apresentam que nos Anos Iniciais um modelo matemático pode ser representado por meio de esquemas, gráficos, desenhos, materiais manipuláveis, colagens e língua natural, os quais constituem sistemas de elementos, operações, relações e regras e servem para descrever, explicar e/ou prever aspectos da situação-problema. Tortola e Almeida (2018, p.146) também esclarecem que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental é diferente “especialmente no que se refere à simbologia matemática e à produção de modelos matemáticos e seu uso na apresentação de respostas para o problema em estudo em cada situação investigada”.

Em Tortola (2016), os modelos matemáticos produzidos por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, ao desenvolverem atividades de modelagem matemática, são analisados e classificados em descritivos, aritméticos, gráficos, tabulares e textuais.

Modelos aritméticos: consistem em uma estrutura utilizada para expressar a relação entre as variáveis do problema e têm como fundamento números e operações aritméticas elementares [...] Modelos gráficos: estrutura utilizada para organizar e apresentar

dados e informações de maneira objetiva por meio de recursos visuais, que podem ser expressos na forma de figuras geométricas, diagramas, desenhos, ou, imagens [...] Modelos Tabulares: trata-se de uma estrutura na qual as informações são organizadas na forma de tabelas [...] Modelos Textuais: constituem-se em uma estrutura na qual as relações matemáticas entre as variáveis são descritas usando a língua materna [...] Modelos descritivos: modelos cuja estrutura descreve uma relação entre as variáveis do problema usando língua materna associada a números e operações [...] Modelos algébricos: modelos cujas variáveis são expressas por meio de letras e são constituídos pela reunião de letras, números e operações (Tortola, 2016, p.245-246).

Muito embora essa classificação não seja rígida, ela nos ajuda a compreender características das produções das crianças ao desenvolverem atividades de modelagem matemática. É, portanto, nesse sentido que nosso artigo se envereda. Visamos discutir acerca dos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tomando como aporte teórico a classificação indicada por Tortola (2016).

A seguir, apresentamos as opções e os encaminhamentos metodológicos que sustentam nosso estudo.

Contexto da pesquisa e encaminhamentos metodológicos

O desenho metodológico escolhido para o desenvolvimento deste estudo segue orientações da abordagem qualitativa, a qual tem as seguintes características: a fonte direta de dados é o ambiente natural; é descritiva; o interesse reside mais no processo que nos resultados ou produtos; o significado é de importância vital. Segundo Alves-Mazzotti (1999, p. 131) “a principal característica das pesquisas qualitativas é o fato de que estas seguem a tradição ‘compreensiva’ ou interpretativa”.

O cenário investigativo desta pesquisa que, além de qualitativa também, se comporta como um estudo empírico, é uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental, composta por trinta e três alunos, de uma escola pública do interior do Paraná. Assim, os dados que compõem nosso material de análise foram produzidos, nessa turma, ao longo do desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática. Cabe destacar que tanto as crianças quanto a professora (uma das autoras do artigo) não tinham experiências anteriores com atividades de modelagem matemática, foram as primeiras atividades de modelagem matemática desenvolvidas com a turma.

No processo de análise dos dados, orientado pela classificação de modelos matemáticos sugerida por Tortola (2016), consideramos os registros escritos das crianças produzidos nas atividades realizadas em sala de aula, bem como as discussões observadas durante as aulas, registradas nas anotações da professora.

Análise e discussão

A análise que empreendemos considera discutir acerca dos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em atividades de modelagem matemática, com base na classificação proposta por Tortola (2016). As atividades denominadas “Gestão de frutas na escola” e “Organizando a saída escolar nos dias de chuva”, tiveram seus temas sugeridos pela professora.

A atividade 1: Gestão de frutas na escola

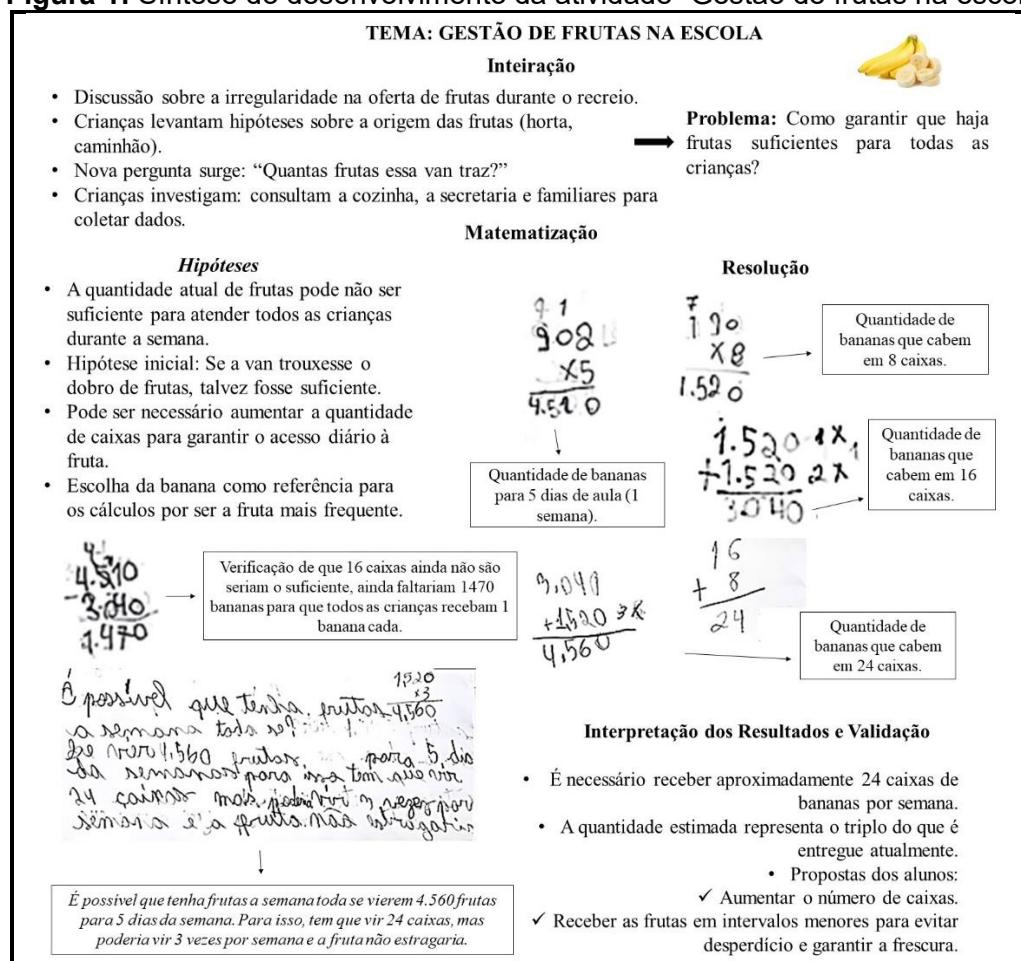
A temática "Gestão de frutas na escola" foi motivada a partir de uma discussão inicial: a irregularidade na oferta de frutas durante os recreios escolares. Ao voltar do recreio, as crianças relataram que naquele dia havia goiaba, mas que "nem sempre tem fruta", o que gerou uma discussão coletiva motivada pela pergunta da professora: "*Por que tem dia que tem e outros que não têm frutas?*". A partir desse questionamento, emergiram conjecturas diversas, tais como: uma criança afirmou que as frutas vinham da "horta da cooperativa", enquanto outra mencionou o "caminhão de frutas".

A partir dessa discussão, desenvolveu-se uma atividade de modelagem matemática, realizada ao longo de 4 horas-aula, com as crianças organizadas em 6 grupos: três grupos com 5 crianças e três grupos com 6 crianças. Na Figura 1 apresentamos uma síntese do desenvolvimento dessa atividade.

Durante o debate entre as crianças e a professora, surgem indagações que impulsionam o aprofundamento da análise da situação que seria investigada. Como parte da rotina escolar, uma van chega diariamente à escola trazendo os alimentos, incluindo frutas. Em certo momento, uma criança faz a seguinte proposição: "*E se a van trouxesse o dobro de frutas?*". Nesse sentido, essa pergunta funcionou como hipótese inicial (Figura 1), um palpite que orientou as primeiras investigações. Neste momento, a professora, respondeu com outra pergunta: "*Mas vocês já sabem quantas*

frutas essa van trás?". Essa devolutiva provocou uma inflexão importante no raciocínio do grupo, que passa a perceber que antes de pensar em soluções como "dobrar", é preciso compreender com precisão a situação investigada. A professora estimula as crianças a anotarem a nova pergunta no caderno: Quantas frutas essa van trás? Essa ação marca a transição do campo das hipóteses para o campo da investigação, algo importante na modelagem matemática.

Figura 1: Síntese do desenvolvimento da atividade "Gestão de frutas na escola"



Fonte: Elaborado pelas autoras

A partir disso, as crianças mobilizaram diferentes estratégias investigativas para buscar informações, quais sejam: um grupo vai à cozinha para saber o dia da entrega das frutas, outro à secretaria para saber o número de alunos da escola, e uma criança investiga com sua avó, que trabalha próxima à casa da merenda, quantas caixas são entregues, acionam recursos da escola e da comunidade. Essa busca ativa por informações ilustra o deslocamento da hipótese à investigação.

Durante o processo, a mediação da professora ajudou a ampliar a problematização, ao estimular as crianças a observarem padrões de ausência e presença de frutas e refletirem sobre o funcionamento logístico do fornecimento, até o ponto de surgirem perguntas como: “*Quem traz as frutas?*”, “*Em que dia a van vem?*” e “*Quantas frutas vêm por semana?*”. Esse questionamento surgiu a partir de uma situação vivenciada pelas crianças, em que, em alguns dias, as frutas não eram suficientes para todas. Neste sentido, a investigação da situação se deu a partir do problema: “*Como garantir que haja frutas suficientes para todas as crianças?*”, estabelecendo assim o problema matemático a ser investigado.

Esse processo inicial de investigação possibilitou que os grupos mobilizassem conhecimentos prévios, realizassem coletas de dados e desenvolvessem estratégias para abordagem do problema investigado, permitindo assim que as crianças realizassem a contextualização do problema e a exploração das variáveis por meio da linguagem natural, conforme indica a Figura 2.

Figura 2: Organização das informações

Quantas frutas vêm da van? R: Quando mais valentes.	$ \begin{array}{r} 72 \\ 479 \\ +416 \\ \hline 902 \end{array} $
Qual dia da semana essa van vem? R: Domingo-firme.	R: Merendeira. Tá de valente.
Aluno que tem de manter? R: 479.	
É quanto de fruta? R: 416.	Qual dia que vêm mais frutas na escola? [] . R:
Inde noti: R: 7.	Quantas caixas que têm essa fruta? R:
Quantas bananas tem na escola? 902	Quantas bananas cabem numa caixa de supermercado?

Fonte: Registros dos alunos

Durante a coleta das informações a respeito da situação em estudo, as crianças identificaram que, ao longo do ano letivo, a banana era a fruta que frequentemente era servida na escola. Essa constatação surgiu a partir da escuta das merendeiras, da observação cotidiana e das investigações realizadas por eles. Além

disso, foi destacado que a banana, por ser servida inteira, permitia uma contagem direta por criança, facilitando os cálculos e evitando a necessidade de estimativas fracionárias. Nesse sentido, a escolha da banana como referência para os cálculos não foi definida previamente pela professora, mas construída coletivamente pelas crianças com base em dados reais da realidade escolar. Essa decisão ilustra como a modelagem matemática pode promover a seleção consciente e contextualizada de variáveis, ampliando a compreensão e o engajamento dos alunos na resolução do problema.

As questões formuladas pelas crianças (Figura 2) contribuíram para a investigação da situação e na identificação e organização das informações coletadas, como o número de crianças, a frequência de entrega das frutas e a quantidade recebida. Inferimos que a coleta de tais informações possibilitaram às crianças a análise das variáveis envolvidas e a compreensão do problema em estudo. Já que nas respostas a essas questões identificamos variáveis como a quantidade de crianças, a quantidade de bananas por criança, o número de dias e a capacidade das caixas.

A partir das informações coletadas, as crianças utilizam uma estrutura para estabelecer relações entre as variáveis (quantidade de bananas e a quantidade de caixas), conforme indica a Figura 3.

Figura 3: Modelos aritméticos: aditivos, multiplicativos e subtrativo

Modelos aditivos	Modelos multiplicativos	Modelo subtrativo
$ \begin{array}{r} 190 \\ + 8 \\ \hline 1520 \\ + 1520 \\ \hline 3040 \\ + 1520 \\ \hline 4560 \end{array} \quad \text{8 caixas} $ $ \begin{array}{r} 1 \\ 1520 \\ + 1520 \\ \hline 3040 \end{array} \quad \text{8 caixas} $	$ \begin{array}{r} 1 \\ 6 \\ + 8 \\ \hline 24 \end{array} \quad \text{8 caixas} $ $ \begin{array}{r} 190 \\ \times 8 \\ \hline 1520 \end{array} $ $ \begin{array}{r} 91 \\ 902 \\ \times 5 \\ \hline 4510 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 190 \\ \times 4 \\ \hline 760 \end{array} $ $ \begin{array}{r} 4510 \\ - 3000 \\ \hline 1470 \end{array} $

Fonte: Registros das crianças

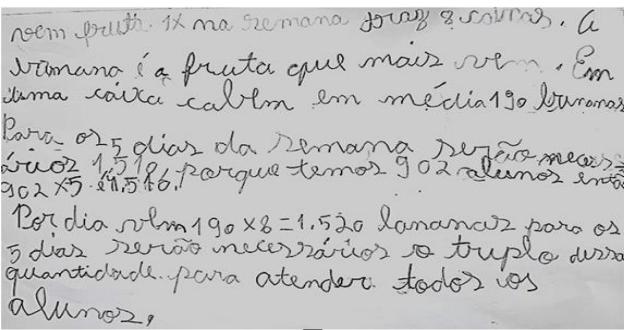
As crianças recorrem à adição para somar progressivamente a quantidade de bananas contidas nas 8 caixas. Em seguida, utilizam a multiplicação para determinar o total de bananas necessárias para os 5 dias (Figura 3). A subtração também é

empregada com o intuito de verificar se a quantidade de frutas disponíveis seria suficiente, comparando o total necessário com o fornecido.

Esses diferentes procedimentos evidenciam que as crianças mobilizaram princípios aditivos, multiplicativos e subtrativos para representar e resolver o problema. Tais estratégias caracterizam a adoção de modelos aritméticos, conforme a classificação proposta por Tortola (2016), os quais possibilitam organizar as variáveis envolvidas e realizar as operações necessárias para estimar e validar a quantidade total de bananas requeridas. Assim, os registros revelam que o uso desses modelos permitiu às crianças estabelecer relações matemáticas a partir dos dados coletados e interpretar a situação-problema com base em representações quantitativas.

Ao avançarem na investigação do problema e na interpretação dos cálculos realizados, as crianças passaram a utilizar uma abordagem textual (Figura 4). Elas descrevem o problema utilizando a língua materna para explicitar as relações matemáticas. Por exemplo, ao invés de escreverem em notação matemática " $902 \times 5 = 4510$ ", eles escreveram: "Para os 5 dias, são necessárias 4510 bananas, porque temos 902 alunos". Isso evidencia que as crianças fazem uso da linguagem natural associada a símbolos numéricos, o que demonstra que além delas utilizarem palavras e expressões da língua materna para descrever as relações matemáticas envolvidas no problema, fazem uso de símbolos numéricos com descrições, o que indica o uso do modelo textual, segundo Tortola (2016).

Figura 4: Modelo textual



↓

Vem fruta 1x na semana, (a van) traz 8 caixas. A banana é a fruta que mais vem. Em uma caixa cabem, em média, 190 bananas. Para os 5 dias da semana, serão necessárias 4.510 bananas, porque temos 902 alunos. Então:

$$902 \times 5 = 4.510.$$

Por dia, vêm $190 \times 8 = 1.520$ bananas para os 5 dias. Serão necessários o triplo dessa quantidade para atender todos os alunos.

Fonte: Registro das crianças

A partir dos registros apresentados no modelo textual da Figura 4, podemos inferir que algumas crianças chegaram à conclusão do triplo ao perceberem que uma mesma quantidade se repetia três vezes, indicando um raciocínio multiplicativo intuitivo. A utilização da linguagem natural, associada a símbolos matemáticos, evidencia uma forma de representar e justificar resultados, caracterizando a integração entre modelos aritméticos e o modelo textual. As crianças utilizam uma abordagem descritiva, que envolve a exploração qualitativa e a contextualização do problema por meio da linguagem natural. Adotam modelos aritméticos, empregando operações aditivas, multiplicativas e subtrativas para calcular e organizar as variáveis quantitativas. Além disso, fazem uso do modelo textual, o que demonstra integração de descrições verbais com símbolos numéricos e reflete uma compreensão das relações matemáticas envolvidas. A produção dos modelos, nessa atividade, indica que as crianças aprimoram o processo de modelagem, desde a análise inicial do problema até a formulação e resolução da situação em estudo, a partir da utilização de diferentes tipos de modelos matemáticos.

Nessa atividade observa-se que as crianças dos Anos Iniciais produziram principalmente modelos aritméticos para organizar e resolver o problema apresentado, demonstrando o uso consciente de operações como adição, multiplicação e subtração para lidar com quantidades reais e variáveis contextuais. Além disso, a utilização do modelo textual para expressar, em linguagem natural, as relações matemáticas revela uma característica importante desses modelos: a articulação entre o raciocínio numérico e a comunicação verbal, o que é inclusive, uma característica comum de crianças nesse nível de escolaridade, sendo importante para a compreensão e explicação do problema.

Essa integração entre modelos aritméticos e textuais evidencia que as crianças não apenas realizaram cálculos, mas também desenvolveram estratégias de representação e justificativa que enriquecem a compreensão do problema, apontando para uma apropriação progressiva dos conceitos matemáticos.

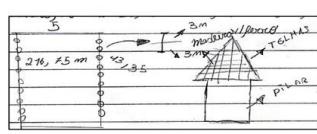
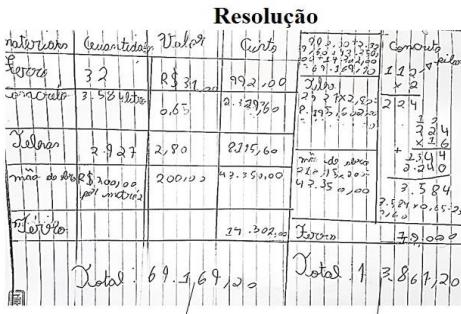
Na atividade Organizando a saída escolar em dias de chuva

A temática “Organizando a saída escolar em dias de chuva” foi motivada a partir de uma discussão inicial da professora com as crianças sobre a saída da escola

em dias de chuva. O debate gerou discussão a respeito da aglomeração das crianças em dias chuvosos já que o portão maior estava sem cobertura.

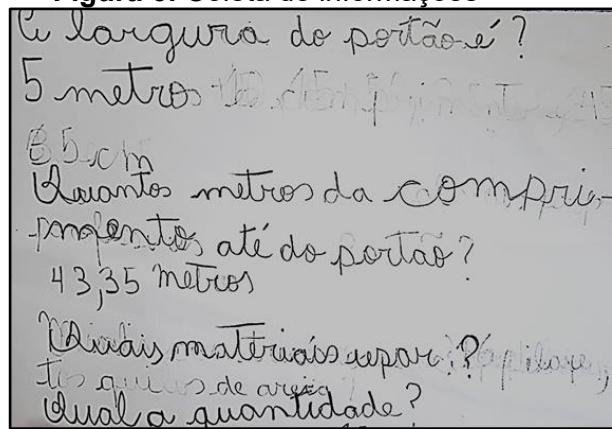
A partir dessa discussão, desenvolveu-se uma atividade de modelagem matemática, realizada ao longo de 6 aulas, com as crianças organizadas em grupos. O problema formulado pela professora em colaboração com as crianças, consiste em: *“Como cobrir o portão para melhorar a organização na saída escolar em dias de chuva?”* Na Figura 5, apresentamos uma síntese do desenvolvimento dessa atividade.

Figura 5: Síntese do desenvolvimento da atividade: Organizando a saída escolar em dias de chuva

TEMA: ORGANIZANDO A SAÍDA ESCOLAR EM DIAS DE CHUVA						
Interação						
<ul style="list-style-type: none"> Aglomeração de crianças na saída da escola em dias de chuva, o que causa desorganização e desconforto. Crianças precisam correr na chuva ao passar pelo portão maior, que está sem cobertura. Coleta de dados para compreender as dimensões da área a ser coberta e levantar informações relevantes à resolução do problema. 						Problema: Como cobrir o portão para melhorar a organização na saída escolar em dias de chuva?
						
Hipóteses						Matematização
<ul style="list-style-type: none"> Cobrir o portão com uma estrutura adequada, pode melhorar a organização e o conforto na saída escolar em dias de chuva. 						
Interpretação dos Resultados e Validação						Resolução
<ul style="list-style-type: none"> Comparação dos custos das estruturas de ferro (R\$ 73.867,20) e madeira (R\$ 69.169,20). Escolha do ferro, por ser mais durável, exigir menos manutenção e combinar com o visual da escola. 						
						Valor total com cobertura em madeira Valor total com cobertura em ferro

Fonte: Elaborado pelas autoras.

As crianças iniciaram a investigação do problema formulando questões como: “Qual é a largura do portão?” e “Quais materiais usar?”. A partir dessas questões, as crianças realizaram a coleta de informações para saber a largura do portão, a área que seria coberta, conforme indica a Figura 6. Para que pudessem realizar as medidas fizeram uso de barbante, mediram a área a ser coberta, identificando que o espaço possuía aproximadamente 5 metros de largura e 43,35 metros de comprimento. Com base nesses dados, a professora introduziu o conceito de área, explicando que se poderia calcular o espaço necessário para a cobertura por meio da multiplicação: $5 \times 43,35 = 216,75 \text{ m}^2$.

Figura 6: Coleta de informações

Fonte: Registros dos alunos.

Em continuidade ao desenvolvimento da atividade, em outro dia, uma das crianças consultou um familiar que é engenheiro civil e trouxe para a discussão com as demais crianças anotações nas quais constavam orientações sobre os materiais a serem utilizados, estrutura, entre outras informações técnicas que ajudaram na resolução da atividade. Esses dados foram compartilhados com a turma, e, durante a leitura coletiva, a professora fazia anotações no quadro e constantemente incentivava as crianças com expressões como: “Vai organizando aí!”, promovendo uma prática ativa de estruturação dos dados.

É nesse contexto que emerge o modelo tabular, construído a partir das anotações da professora na lousa e dos dados trazidos pelas crianças. As informações passaram a ser organizadas em uma tabela, conforme indica a Figura 7. As crianças organizaram de tal modo que separam os materiais, seus custos e quantidades necessárias para a cobertura do portão. Inferimos que, essa organização tabular permitiu às crianças visualizassem as variáveis envolvidas, identificassem padrões e refletissem sobre qual opção seria mais adequada.

Conforme Tortola (2016), modelos tabulares são aqueles em que as informações são dispostas em quadros ou tabelas, facilitando a comparação entre valores e apoiando a interpretação dos resultados, nesse sentido, concluímos que as crianças fazem uso de modelos tabulares segundo a classificação de Tortola (2016) e que esse modelo foi central na organização da investigação, articulando os dados produzidos pelas crianças e os conhecimentos matemáticos mobilizados durante a atividade.

Figura 7: Modelos tabulares

Materiais	Quantidade	Valor	Custo	Conceto
Ferro	32	R\$ 31,00	992,00	$992,00 + 32,00 = 1024,00$ $1024,00 \times 14,20 = 1459,20$ $1459,20 \times 12 = 17510,40$
Concreto	3,584 litros	0,65	2.329,60	$2.329,60 \times 2,80 = 6424,00$ $6424,00 \times 12 = 77088,00$
Telhas	2.927	2,80	8.215,60	$8.215,60 \times 12 = 98584,00$
Madeira	R\$ 100,00 por metro	200,00	40.000,00	$40.000,00 \times 12 = 480000,00$
Letreiro			17.302,00	$17.302,00 \times 12 = 207624,00$
			Total: 69.169,20	Total: 13.867,20

Fonte: Registros das crianças

A construção do modelo tabular esteve acompanhada do uso de modelos aritméticos, principalmente por meio das operações de multiplicação e adição. As crianças realizaram cálculos para estimar a quantidade de pilares, quantidade de ferro necessário e os respectivos custos (Figura 8). Durante esses momentos, destaca-se o papel da professora na mediação e problematização das escolhas dos alunos, como no episódio em que pergunta: “Se fosse para construirmos ali, qual seria a melhor opção? Ferro ou madeira?”, e as crianças responderam: “Ferro!”. A professora, que também havia feito uma pesquisa prévia sobre os materiais, complementa os dados com base nas diferentes possibilidades orçamentárias. Essa mediação foi importante na ampliação das possibilidades de análise, ao introduzir dados sobre diferentes orçamentos e materiais. Inferimos que essa intervenção contribuiu para a validação e comparação crítica entre as alternativas propostas.

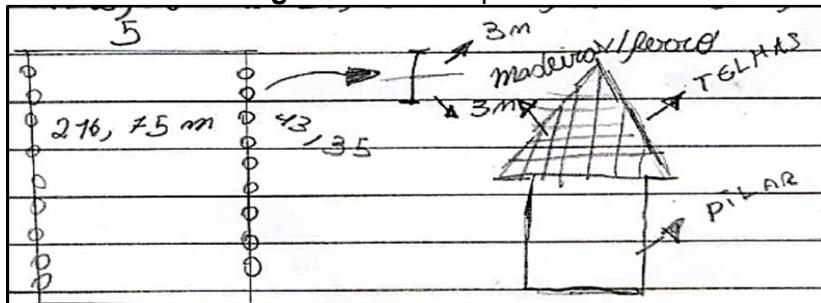
Esse uso que as crianças fazem das operações aritméticas, como a soma para adicionar custos individuais e a multiplicação para determinar o custo total, ilustrado na Figura 8, sugere que elas fazem uso de uma estrutura matemática para relacionar as variáveis envolvidas na situação em estudo. Inferimos, portanto, que esse uso indica a utilização de modelos aritméticos, tanto aditivos quanto multiplicativos, para calcular custos e quantidades de materiais (Tortola, 2016).

Figura 8: Modelos aritméticos: multiplicativos e aditivos (atividade 2)

Modelos aditivos	Modelos multiplicativos
$\begin{array}{l} \text{Total: } 69.169,00 \\ 992,00 + 2.329,60 \\ 18.195,60 + 43.350 \\ 20 + 14.302,00 = 69. \\ 169,00 \end{array}$	$112 \times 2 = 224 \text{ litros}$ $\begin{array}{r} 38 \\ \times 214 \\ \hline 3584 \end{array}$ 3.584 litros $3.584 \times 0,65 = 2.329,60 \text{ concreto}$ $2.927 \times 210 = 2.195,60$ $216,75 \times 200,00 = 43.350$ $\begin{array}{r} 3100 \\ \times 92 \\ \hline 29200 \end{array} \rightarrow \text{Ferro}$

Fonte: Registros das crianças

Paralelamente, as crianças recorreram a representações pictóricas, por meio de desenhos que ilustravam os pilares, a cobertura e a estrutura geral da proposta (Figura 9). Nesse sentido, inferimos que essas produções visuais podem ter contribuído para que compreendessem melhor a configuração física do espaço e refletissem sobre a viabilidade técnica da solução apresentada, favorecendo a construção de sentido em torno do problema investigado.

Figura 9: Modelo pictórico

Fonte: Registros das crianças

Ao desenharem, as crianças puderam visualizar a estrutura da cobertura e os materiais envolvidos, além de identificarem os objetos presentes no cenário representado. Esse recurso pode ter facilitado tanto a compreensão quanto a análise da situação proposta. Assim, observa-se o uso de um modelo pictórico, entendido, conforme Tortola (2016), como aquele que emprega imagens ou figuras na representação de dados e informações relacionados à situação-problema.

Inferimos, portanto, que o uso combinado de diferentes modelos favoreceu a compreensão e a resolução do problema proposto. O modelo tabular proporcionou a organização e análise da situação em estudo. Os modelos aritméticos permitiram a realização dos cálculos e comparações e, o modelo pictórico contribuiu para as

crianças visualizarem como ficaria a cobertura do portão da escola. Ressaltamos que os modelos não foram utilizados de forma isolada, mas articulados, o que possibilitou às crianças sustentarem suas decisões e escolhas para a investigação da situação.

Considerações finais

Neste artigo discutimos acerca dos modelos matemáticos produzidos por crianças do 4º ano do Ensino Fundamental, com vista a identificar características desses modelos. Esses modelos matemáticos foram produzidos ao longo do desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática, a saber: "Gestão de frutas na escola" e "Organizando a saída escolar em dias de chuva".

Nessas duas atividades os modelos matemáticos emergiram de forma contextualizada e articulada e, aparecem manifestados por meio de representações diversas, entre elas, aritméticas, tabulares, pictóricas e textuais, que permitiram, de algum modo, responder aos problemas elegidos para estudo. Tais modelos correspondem à classificação proposta por Tortola (2016) e, ao mesmo tempo, evidenciam o potencial formativo da modelagem matemática nos Anos Iniciais. O papel das crianças em atividades de modelagem matemática, aliado à mediação da professora, além de viabilizar a emergência dessa variedade de modelos matemáticos revela um movimento particular de fazer matemática nos Anos Iniciais, que se dá de forma fluida, contextual e colaborativa.

Na atividade "Gestão de frutas na escola" ocorreu uma integração entre distintos modelos no processo de resolução do problema. Por exemplo, as crianças passam da adição item a item à multiplicação, e então à subtração para validar uma hipótese, e utilizam a linguagem textual como meio de explicação. A variação e adaptação desses modelos evidencia uma transição coordenada e funcional em torno da resolução do problema.

Já na atividade "Organizando a saída escolar em dias de chuva", cada modelo matemático produzido desempenhou seu papel de forma pontual. O modelo tabular teve um papel central e permitiu às crianças estruturar e organizar a situação em estudo. Os modelos aritméticos possibilitaram os cálculos e comparações e, os modelos pictóricos, colaboraram para a visualização da proposta de cobertura do portão da escola. Da análise desses modelos inferimos que eles não foram utilizados

de forma isolada. Eles foram olhados de forma articulada quando da intenção de sustentar decisões coletivas e justificar suas escolhas.

Do estudo empreendido destacamos que os modelos matemáticos produzidos pelas crianças se comportam não como respostas prontas, mas como construções progressivas, moldadas pelas investigações conduzidas pelas próprias crianças, mediadas pela escuta da professora. Ademais, o uso articulado de diferentes modelos matemáticos favoreceu a compreensão e a resolução dos problemas propostos. O fazer matemática das crianças no contexto de atividades de modelagem matemática também evidencia que os modelos matemáticos que elas produzem não são estáticos; eles se refazem à medida que as crianças exploram variáveis, elaboram hipóteses e validam suas decisões. Ponderamos que há, nesse caminhar, um movimento que dá aos modelos matemáticos uma ideia de modelos em transformação, uma nuance que extrapola a simples categorização e se aproxima de uma compreensão dinâmica e formativa da modelagem matemática nos Anos Iniciais.

Ressaltamos que os modelos produzidos pelas crianças favoreceram a produção de conhecimento pelas próprias crianças. Ao organizarem os dados em tabelas, representarem as estruturas em desenhos ou justificarem cálculos em linguagem natural, os modelos não se limitam a representar uma solução, mas atuam como ferramentas que possibilitam o raciocínio, a comparação, a tomada de decisão e a comunicação matemática no coletivo. Tal evidência reafirma a importância de compreender os modelos matemáticos não apenas como produtos finais, mas como meios pelos quais o pensamento matemático das crianças se estrutura, se comunica e se desenvolve.

Salientamos, que nessas duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelas crianças não emergiram todas as classificações de modelos matemáticos enunciadas por Tortola (2016). Contudo, entendemos que a ausência, por exemplo, de modelos matemáticos descritivos pode estar associada à temática das atividades e/ou ao tratamento que as crianças deram ao desenvolvimento das atividades. De qualquer modo, ressaltamos que a produção dos modelos matemáticos foi dinâmica e trouxe à tona diferentes representações matemáticas, para além de permitir a resolução dos problemas em estudo.

Referências

- ALMEIDA, L. M. E. de; SILVA, K. A. P da; VERONEZ, M. R. D. Sobre a Geração e Interpretação de Signos em atividades de Modelagem Matemática. In: **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 6, Anais, Pirenópolis – Goiás, 2015.
- ALMEIDA, L. M. W. de; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Revista Acta Scientiae**, Canoas, RS, v. 14, n. 2, p. 200-214, maio/ago. 2012.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012. 158 p.
- ALVES-MAZZOTTI, A. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWAMDSZNADJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2 ed. São Paulo: Pioneira, 1999.
- ARAÚJO, J. de L.; FREITAS, W. S. de; SILVA, A. C. da. Construção crítica de modelos matemáticos: uma experiência na divisão de recursos financeiros. In: ALMEIDA, L. M. W. de; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas**. 1. ed. Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011.
- BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009.
- D'AMBROSIO, U. Mathematical Modelling: Cognitive, Pedagogical, Historical and Political Dimensions. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 1, 2009, p. 89-98.
- DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education**, Reston, v. 34, n. 2, 2003, p. 110-136.
- ENGLISH, L. Mathematical modelling with young learners. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling: a way of life**. Chichester: Horwood Publishing, 2003, p. 3-18.
- ENGLISH, L. Modeling with complex data in the primary school. In: LESH, R. et al. (Eds.). **Modeling students' mathematical modeling competencies**. New York, London: Springer, 2010. p. 287-300.
- ENGLISH, L.; WATTERS, J. Mathematical modelling with young children. In: HØINES, M. J.; FUGLESTAD, A. B. (Eds.). **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 2. Bergen: IGPME, 2004. p. 335-342.

GOMES, J. C. S. P.; SILVA, K. A. P. Prática de Modelagem Matemática nos anos iniciais: um olhar para o processo de formação. **Pesquisa e Debate em Educação**, v. 11, n. 2, 2021, p. 1-23.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Models and Modeling. In: **Annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education**, 28, Mérida. Proceedings...Universidad Pedagógica Nacional: Mérida, 2006, p. 92-95.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A Modelagem Matemática nas séries iniciais: o gérmen da criticidade. **Alexandria**, Santa Catarina, n. 2, 2009, p. 135-157.

MAAB, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics β classes: results of an empirical study. **Teaching Mathematics and Its Application: The 10 ICME th**, v.24, n. 2-3, p. 61-74, set. 2005.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMA, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences**. New York: Springer, 2015, p. 67-79.

NUNOMURA, A. R. T. **Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para os registros de representação semiótica**. 2021. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021. DOI: 10.26843/renclima.v12n2a12. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/renclima/article/view/2937>. Acesso em: 6 dez. 2025.

TEODORO, F. P. **A recontextualização da Modelagem Matemática na prática pedagógica nos anos iniciais**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, 2018.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Londrina, 2016a. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. A Formação Matemática de Alunos do Primeiro Ano do Ensino Fundamental em Atividades de Modelagem Matemática: uma Perspectiva Wittgensteiniana. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 11, n. 25, 4 jun. 2018, p. 142-161.

TORTOLA, E.; SILVA, K. A. P. da. Sobre modelos matemáticos nos anos iniciais: das pesquisas às práticas. **Em Teia**, Pernambuco, v. 12, n. 3, 2021, p. 1-26.