Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino
REPPE

Edição Especial
X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
Universidade Estadual do Norte do Paraná – Cornélio Procópio (PR), 2024

ESTRUTURAÇÃO DE ANDAIMES EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

SCAFFOLDING STRUCTURE IN MATHEMATICAL MODELING ACTIVITIES

Rosângela Maria Kowalek[1]
Flávio Lima de Souza[2]
Lourdes Maria Werle de Almeida[3]

Resumo
Neste artigo, apresenta-se uma investigação acerca das dificuldades enfrentadas por alunos iniciantes durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e, a partir disso, discutem-se elementos necessários para a estruturação de andaimes (*scaffolding*) capazes de oferecer suporte a esse tipo de atividade. Com base em uma pesquisa empírica, foram identificadas dificuldades em diferentes fases do ciclo de modelagem, especialmente na formulação de hipóteses, na realização de simplificações, na construção de modelos matemáticos e na análise e validação dos resultados. A partir desse diagnóstico, os autores caracterizam quatro elementos relevantes para compor um andaime voltado a alunos iniciantes em modelagem matemática: (i) dicas para inteirar-se com a situação, (ii) orientações para organizar a resolução do problema, (iii) sugestões sobre o uso da matemática e (iv) indicações para explicar e interpretar os resultados. O estudo também analisa dois planos de resolução presentes na literatura, verificando em que medida contemplam os elementos identificados. Os resultados mostram que ambos os planos abrangem os quatro elementos propostos, por meio de ações e orientações distribuídas ao longo de suas etapas. Desse modo, o plano de resolução configura-se como um suporte promissor, capaz de orientar os alunos na tomada de decisões relevantes durante o

1 Universidade Estadual de Londrina - UEL, Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
2 Instituto Federal do Paraná – IFPR – Campus Pitanga, Doutorando no programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática-PECEM.
3 Universidade Estadual de Londrina – UEL, Doutora em Engenharia de Produção.

desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, constituindo-se em um excelente instrumento para alunos iniciantes neste tipo de atividade.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Andaimes; Plano de resolução.

Abstract
This article presents an investigation into the difficulties faced by novice students during the development of a mathematical modelling activity and, based on these findings, discusses elements necessary for structuring scaffolding capable of supporting this type of activity. Based on an empirical study, difficulties were identified in different phases of the modelling cycle, particularly in hypothesis formulation, simplification, construction of mathematical models, and analysis and validation of results. From this diagnosis, the authors characterise four relevant elements for composing scaffolding aimed at novice students in mathematical modelling: (i) tips for becoming familiar with the situation, (ii) guidelines for organising problem-solving, (iii) suggestions regarding the use of mathematics, and (iv) indications for explaining and interpreting the results. The study also analyses two solution plans found in the literature, examining the extent to which they address the identified elements. The results show that both plans encompass the four proposed elements through actions and guidelines distributed across their stages. Thus, the solution plan is configured as a promising form of support, capable of guiding students in making relevant decisions during the development of mathematical modelling activities, constituting an excellent instrument for beginner students in this type of activity.

Keywords: Mathematical Modeling; Scaffolding; Solution Plan.

Introdução

A Modelagem Matemática tem sua essência na investigação de situações reais mediadas pela matemática. Nesse sentido, em sala de aula, a modelagem[4] se configura como uma “possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema” (Almeida, Silva, Vertuan, 2012, p. 15).

Utilizar atividades de modelagem matemática em sala de aula implica propor situações que promovam investigações matemáticas (Almeida; Silva, 2014). Nessa direção, Jankvist e Niss (2020) destacam que a resolução de problemas em atividades de modelagem requer habilidades para explorar, resolver e analisar, aspectos que denotam uma certa complexidade envolvida nesse tipo de atividade.

[4] Para evitar repetições assumimos o termo modelagem em algumas partes do texto como sinônimo de modelagem matemática.

Diversas pesquisas apontam que as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos em atividades de modelagem matemática envolvem lidar com situações-problema com informações limitadas e definir estratégias de resolução. Entre os desafios mais recorrentes estão: a transição do problema do mundo real para o domínio da matemática (Kadijević, 2009); o enfrentamento de problemas abertos (Almeida, Kowalek, Souza, 2024b); a construção do modelo matemático (Jupri; Drijvers, 2016); a análise dos modelos construídos e a interpretação dos resultados (Soon; Lioe; Mcinnes, 2011; Almeida, Kowalek, 2024).

A superação destas dificuldades em sala de aula depende da intervenção realizada pelo professor; de fato, os alunos precisam do apoio do professor para se tornarem potenciais modeladores (Stender e Kaiser, 2015). Almeida, Silva e Vertuan (2012) ressaltam que, em atividades de modelagem matemática, o professor deve orientar, indicar possíveis caminhos, sugerir procedimentos, fazer perguntas, promovendo momentos de discussões no decorrer da atividade que favoreçam a aprendizagem e a superação das dificuldades.

Nesse contexto, a literatura apresenta diferentes estratégias que o professor pode adotar para intervir junto aos alunos, entre elas o suporte que, internacionalmente, se reconhece pela expressão *scaffolding*. Na língua brasileira esse termo pode ser traduzido como andaime, que, oriundo da construção civil, é utilizado metaforicamente na Educação para designar um suporte adaptativo e temporário que auxilia os alunos em atividades que ainda não conseguem realizar de forma autônoma.

Estudos anteriores (Almeida, Kowalek, Souza, 2024a; Becksculte, 2020; Durandt, Lautenbach, 2020; Schukajlow *et al*., 2015; Stender; Kaiser, 2015) apontam que a utilização de andaimes em atividades de modelagem matemática pode ser promissora, pois possibilita ao professor oferecer suporte estratégico aos alunos.

Neste artigo, a partir de uma pesquisa empírica, buscou-se, inicialmente, diagnosticar as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Com base nesse diagnóstico, foram caracterizados os elementos necessários para a estruturação de andaimes capazes de oferecer suporte a esse tipo de atividade. Por fim, analisou-se de que forma os planos de resolução presentes na literatura contemplam a inclusão desses elementos.

Este trabalho constitui uma versão ampliada e aprimorada do trabalho intitulado *Elementos necessários em Andaimes para Atividades de Modelagem*

Matemática, originalmente apresentado no X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (X EPMEM), realizado na Universidade Estadual do Norte do Paraná, em Cornélio Procópio, Paraná. Nesta nova versão, ampliamos a seção de resultados, aprofundando a identificação das dificuldades enfrentadas por alunos iniciantes em modelagem matemática e analisando, nos planos de resolução, elementos que fomentam o fazer modelagem.

Demandas das atividades de modelagem matemática

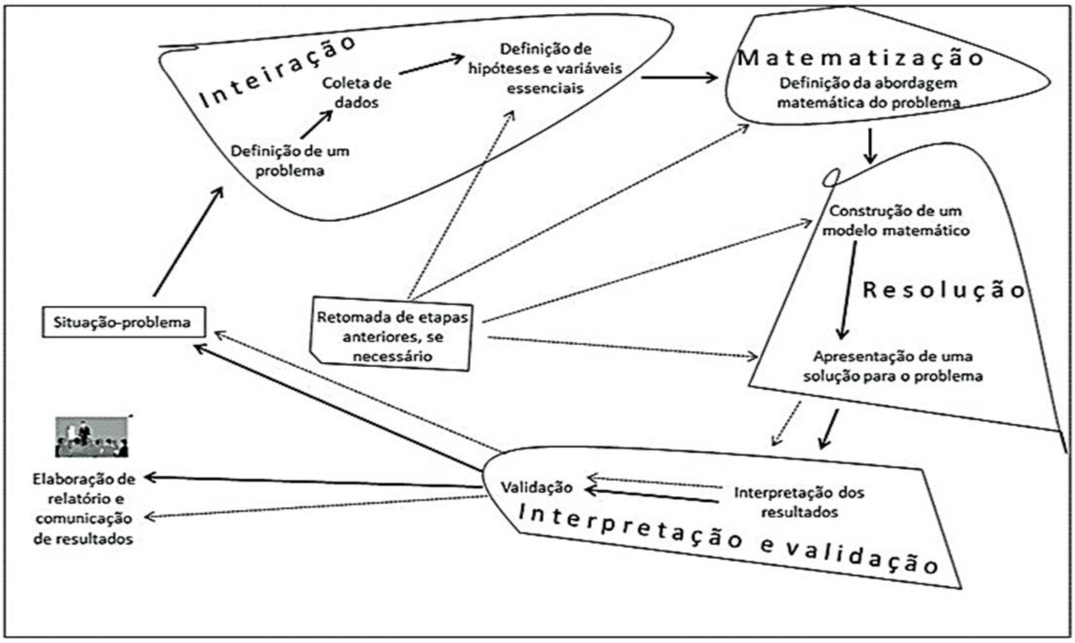
A Modelagem Matemática consiste na construção de relações entre o mundo real e o mundo matemático, ou seja, a "modelagem matemática sempre envolve, matemática, realidade e a interlocução entre elas" (Almeida, 2022, p.130). Nesse sentido, Gaimme (2016) destaca que a modelagem caracteriza-se como um processo dinâmico, criativo e interpretativo, que visa compreender, explicar, prever e, por vezes, intervir na realidade através do uso de ferramentas e conceitos matemáticos.

Assim, a modelagem matemática envolve a busca por soluções para problemas da realidade por meio da construção e validação de modelos matemáticos (Geiger *et al.*, 2022; Almeida, 2023; Blum, 2015). Segundo Almeida e Silva (2014), modelos matemáticos são esquemas ou estruturas que possibilitam a interpretação dos aspectos relevantes da situação em estudo à luz da matemática.

Em sala de aula, uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita como um processo cíclico (Figura 1), que parte de uma situação inicial - na qual se identifica um problema - e culmina em uma situação final, que representa uma solução encontrada. A transição entre essas duas situações é dividida em diferentes fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação (Almeida, Silva, Vertuan, 2012).

A fase de inteiração representa o primeiro contato dos alunos com o problema e tem como objetivo compreender suas características e especificidades. Na matematização, o problema previamente identificado e estruturado na fase anterior é convertido da linguagem natural para a linguagem matemática. Nessa etapa, são formuladas hipóteses, definidas as variáveis e feitas simplificações em relação às informações e ao problema definido.

Figura 1: Ciclo de modelagem matemática apresentado por Almeida, Castro e Silva



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021, p. 386)

Em seguida, na fase de resolução, constrói-se o modelo matemático com vistas a descrever e resolver a situação proposta. A interpretação dos resultados envolve a análise crítica da resposta obtida, sendo esse um processo avaliativo realizado pelos alunos que permite verificar a adequação do modelo. Por fim, a validação consiste em julgar se os resultados fazem sentido em relação ao problema original.

Além dessas etapas, Almeida, Castro e Silva (2021) acrescentam a comunicação dos resultados obtidos e a elaboração de um relatório, como ações fundamentais, especialmente quando atividades de modelagem são incluídas nas aulas em diferentes níveis de escolaridade.

Desse modo, atividades de modelagem matemática envolvem problemas cuja resolução exige múltiplas competências por parte dos alunos, frequentemente extrapolando procedimentos matemáticos previamente conhecidos. Conforme Almeida (2022), tais atividades demandam dos alunos cinco ações essenciais: formular, investigar, resolver, interpretar e avaliar (ou validar). Para Almeida, Castro e Silva (2021), o desenvolvimento dessas atividades em sala de aula pode requerer conceitos e métodos matemáticos que ainda não fazem parte do repertório de conhecimento dos alunos.

De acordo com Schukajlow *et al.* (2015), a inserção da Modelagem Matemática no ambiente escolar tem se ampliado nos últimos anos, e, com isso, as demandas inerentes a esse tipo de atividade revelam dificuldades relacionadas ao enfrentamento de barreiras durante a sua realização - aspectos que precisam ser investigados e superados.

Diante dessas especificidades, aliadas à pouca familiaridade dos alunos com a modelagem matemática, oferecer suporte estratégico durante a realização dessas atividades configura-se como uma alternativa relevante e necessária para promover a aprendizagem e favorecer o engajamento dos alunos no processo de modelagem.

Sobre andaimes no contexto educacional

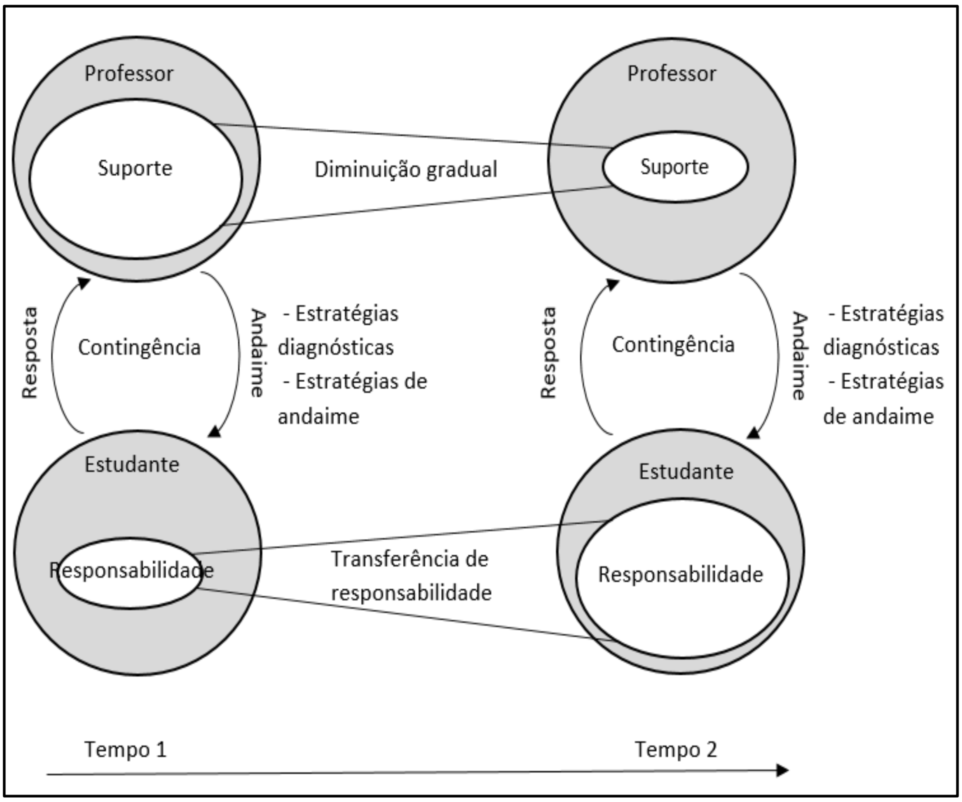
A origem do conceito de andaime na Educação está relacionada ao termo *scaffolding*, utilizado pela primeira vez por Wood, Bruner e Ross (1976), para descrever o processo que possibilita a um aprendiz resolver um problema, realizar uma tarefa ou alcançar um objetivo que, sem uma ajuda, estaria aquém de suas capacidades, sendo, portanto, o *scaffolding* o suporte necessário para suas ações. De acordo com Jadallah *et al.* (2011), esse suporte visa conduzir gradualmente o aluno a um estado de competência em que ele seja capaz de completar tarefas semelhantes de maneira independente**.**

Segundo Van de Pol *et al.* (2010), os andaimes correspondem a suportes interativos entre professor e aluno, sendo ambos participantes ativos de seu uso. O suporte oferecido depende das características da situação - como o tipo de atividade e as respostas dos alunos -, o que significa que os andaimes não podem ser utilizados em todas as situações da mesma forma, exigindo atenção às particularidades da situação e dos alunos.

Na literatura, destacam-se três características principais dos andaimes: contingência, diminuição gradual e transferência de responsabilidade (Van de Pol *et al.*, 2010), veja a Figura 2.

A contingência diz respeito à adaptação do suporte conforme as respostas e necessidades do aluno durante a realização da atividade. Conforme Van de Pol *et al.* (2011), a contingência exige do professor o uso de estratégias de diagnósticos bem como estratégias de intervenção ao longo do processo de ensino. A diminuição gradual refere-se à retirada gradual desse suporte, à medida que o aluno se torna mais independente. Como consequência, ocorre a transferência de responsabilidade, em que a responsabilidade pela execução de uma atividade é gradualmente transferida do professor para o aluno.

Figura 2: Modelo conceitual de andaime



Fonte: Adaptado de Van de Pol *et al.* (2010, p. 274)

No campo da modelagem matemática, estudos têm evidenciado a eficácia do uso de andaimes na realização de atividades de modelagem (Almeida, Kowalek, Souza, 2024b; Beckscülte, 2020; Durandt, Lautenbach, 2020; Stender *et al.*, 2017; Schukajlow *et al.*, 2015; Stender; Kaiser, 2015). Esses trabalhos discutem diferentes tipos de suporte que podem ser considerados como andaimes, entre os quais se destacam: o apoio estratégico (Stender *et al.*, 2017), ensino dialógico (Stender *et al.*, 2017; Stender, Kaiser, 2015), plano de resolução (Almeida, Kowalek, Souza, 2024a; Beckschulte, 2020; Durandt; Lautenbach, 2020; Schukajlow *et al.*, 2015), fichas de acompanhamento (Almeida, 2023), entre outros.

No entanto, embora essas pesquisas apresentem andaimes utilizados como suporte aos alunos em atividades de modelagem, ainda há poucas discussões que abordam o diagnóstico das dificuldades enfrentadas pelos alunos durante o desenvolvimento dessas atividades e de que forma essas dificuldades podem contribuir para a identificação e caracterização de elementos necessários na estruturação de andaimes para esse tipo de atividade.

Aspectos metodológicos e cenários de investigação

O caminho metodológico adotado nesta pesquisa segue orientações da abordagem qualitativa interpretativa em que o olhar está voltado à compressão do fenômeno, buscando significados, interpretações e experiências dos participantes em um contexto no qual o sujeito constrói e faz parte (Garnica, 1996; Bogdan, Biklen, 1994).

No presente artigo, o fenômeno investigado corresponde à identificação das dificuldades dos alunos ao fazer modelagem matemática e, a partir delas, à caracterização de andaimes como suportes a essas dificuldades.

Assim, foi realizada uma pesquisa empírica com dezessete alunos de um curso de Bacharelado em Geografia, durante a disciplina de *Cálculo básico aplicado à topografia,* ministrada por um dos autores deste artigo em uma universidade pública localizada no estado do Paraná. As informações analisadas foram obtidas por meio de gravações em áudio realizadas durante o desenvolvimento da atividade, fotos dos materiais produzidos pelos alunos, relatórios entregues e anotações registradas no diário de campo do professor.

A partir dessa investigação empírica, buscou-se diagnosticar as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Com base nesse diagnóstico, foram caracterizados os elementos necessários à estruturação de andaimes capazes de oferecer suporte a esse tipo de atividade. Por fim, analisou-se de que forma os planos de resolução presentes na literatura contemplam a inclusão desses elementos.

A escolha do desenvolvimento dessa atividade como cenário de investigação fundamenta-se nas contribuições de Tropper *et al.* (2015), segundo as quais a identificação dos elementos que devem compor um andaime requer a realização de uma atividade diagnóstica, capaz de revelar ao professor aquilo que os alunos já conseguem realizar de forma autônoma, bem como os momentos ou aspectos em que necessitam de suporte. Nesse sentido, por se tratar da primeira experiência dos alunos com a modelagem matemática, compreende-se que essa atividade assume um caráter diagnóstico, permitindo identificar elementos que os andaimes destinados a futuras atividades de modelagem matemática devem comtemplar para apoiar os alunos.

Dessa forma, considerando os planos de resolução já apresentados na literatura como suportes para atividades de modelagem matemática, discute-se de que forma tais planos incorporam os elementos identificados nesta investigação.

A atividade de modelagem matemática

O tema *rampas de acessibilidade* foi sugerido pelos próprios alunos, considerando que, naquele período, a instituição estava realizando obras de acessibilidade no campus, embora concentradas apenas em alguns pontos. A partir das discussões sobre a localização e execução dessas rampas, formulou-se o seguinte problema: *Como devem ser planejadas rampas de acessibilidade em diferentes locais da universidade?*

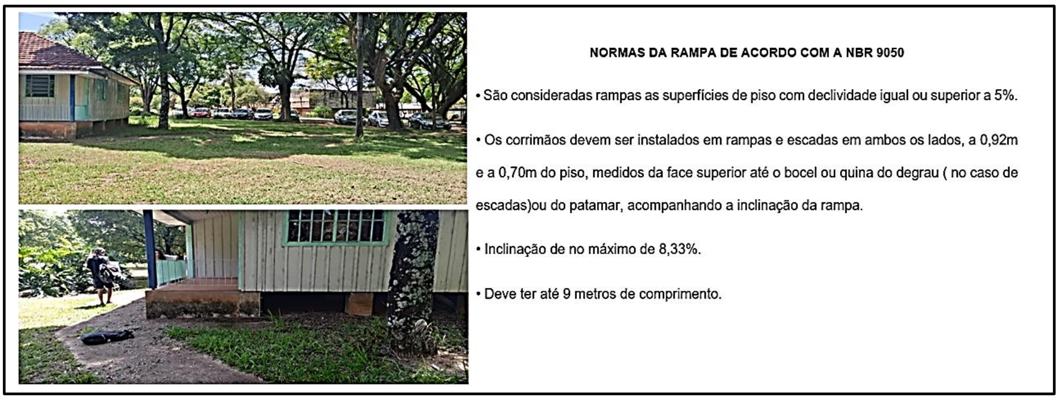
A atividade foi desenvolvida por cinco grupos de alunos, entretanto, considerando a extensão deste artigo, optou-se por apresentar e analisar os dados produzidos por dois desses grupos. O Grupo 1 composto pelos alunos Pedro, João, Lucas, Marcos; e o Grupo 2, pelos alunos Carla, Maria, Ana e Francisco [5].

O grupo 1 planejou uma rampa de acessibilidade para um dos laboratórios da universidade, considerando que se trata de um espaço frequentemente utilizado pelos alunos do curso e que, até então, não dispunha de acesso adequado. Com o objetivo de atender às normas técnicas de acessibilidade, o grupo realizou uma pesquisa sobre os critérios necessários para a construção adequada de rampas. Na Figura 3, são apresentados os resultados dessa pesquisa, acompanhados de fotos do local escolhido.

De posse das informações necessárias para a construção de uma rampa de acessibilidade, o próximo passo consistiu na coleta de dados para definir o local mais adequado para sua instalação. A partir das medições realizadas, o grupo determinou que seriam necessários 8,47 metros de comprimento e 0,68 metros de altura para a construção da estrutura.

5 Foram utilizados nomes fictícios para preservar a identidade dos participantes.

Figura 3: Local escolhido pelo Grupo 1 para projetar uma rampa de acesso



Fonte: Relatório dos alunos

Por meio das medições realizadas o grupo pôde estabelecer as dimensões restantes para esboçar o projeto da rampa. Para isso, utilizaram o Teorema de Pitágoras, assumindo que a rampa poderia ser representada no plano por um triângulo retângulo, como evidenciado no Diálogo 1.

> ***Diálogo 1***
> *Pedro: Vamos usar as fórmulas do triângulo [retângulo], pois a rampa tem esse formato.*
> *João: Já temos algumas medidas, dá para calcular por Pitágoras.*
> *Lucas: Eu acho que não é bem um triângulo [retângulo] certinho... mas e a inclinação?*
> *Pedro: Vamos utilizar outra fórmula.*

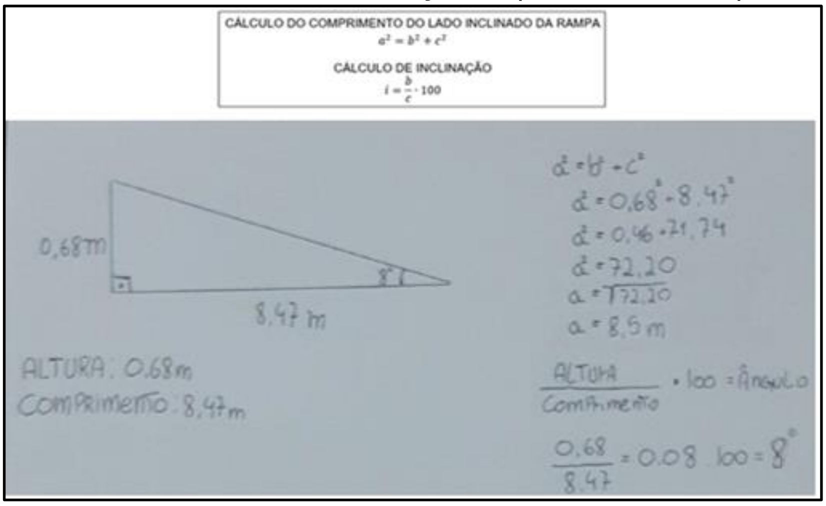
Percebe-se que os alunos, ainda que assumam implicitamente que a lateral da rampa no plano pode ser representada geometricamente por um triângulo retângulo, não explicitaram essa hipótese durante o desenvolvimento da atividade. Eles parecem não reconhecer que essa suposição estabelece uma relação da situação com a matemática, e assim avançar na sua resolução. Além disso, não mencionam quaisquer simplificações adotadas, seja durante a coleta de dados, seja no próprio processo de resolução.

A dificuldade dos alunos em assumir as hipóteses e em explicar as simplificações realizadas torna-se evidente quando o professor os questiona a respeito. Nesse momento, o grupo admite que não realizou tais justificativas, conforme apresentado o Diálogo 2, a partir das perguntas do professor: *Quais são as hipóteses? Vocês fizeram simplificações?*

> ***Diálogo 2***
> *Pedro: Precisa disso, professor?*
> *Professor: Na coleta de dados comentamos que as medições de vocês eram aproximadas, lembram?*
> *João: O senhor falou também que precisávamos apresentar o que iríamos ou não considerar.*
> *Pedro: Também não justificamos por que usamos essa matemática, como o senhor comentou.*
> *Professor: Sim, é preciso sempre apresentar o que iremos assumir na resolução e o que será desconsiderado.*

Embora não tenham explicitado que a rampa poderia ser representada por um triângulo retângulo na resolução do problema, o grupo recorreu a conceitos da trigonometria aplicados ao triângulo retângulo para construir o modelo matemático. As variáveis foram definidas da seguinte forma: *a* - comprimento do lado inclinado da rampa; *b* - altura da rampa; *c* - comprimento horizontal da rampa; *i* - inclinação da rampa expressa em porcentagem. Na Figura 4, são apresentadas a resolução elaborada pelo grupo e o modelo matemático construído pelos alunos.

Figura 4: Modelo matemático e resolução do problema obtido pelo Grupo 1



Fonte: Relatório dos alunos

Em relação as informações apresentadas na Figura 4, observa-se que o modelo matemático só foi explicitado pelo grupo após a intervenção do professor, conforme evidenciado no Diálogo 3. Isso indica que os alunos apresentaram dúvidas e dificuldades em expressar formalmente o modelo matemático que permitiu responder ao problema, dificuldades essas que foram superadas com o apoio do professor.

Diálogo 3
João: Professor, escrevemos o modelo que o senhor falou desse jeito, mas não sabemos se está certo.
Pedro: A gente achou que apenas as contas bastavam.
Professor: É sempre importante apresentar o modelo matemático que descreve a situação, como comentei com vocês.
[...]
Professor: O que significa uma inclinação de 8% na rampa?
Pedro: Professor, uma inclinação de 8% significa que, a cada um metro do comprimento horizontal da rampa, a altura aumenta em 0,08 metro, ou seja, 8 centímetros.
Professor: Mas a fórmula forneceu um valor em graus?
João: Fiquei confuso, precisamos pensar.

Outra dificuldade dos alunos, evidenciada no Diálogo 3, foi a ausência de uma análise dos resultados e cálculos realizados. Embora inicialmente tenham trabalhado com uma inclinação expressa em porcentagem, o resultado final apresentado estava em graus, sem que o grupo percebesse ou discutisse essa incongruência. Isso indica que não houve uma verificação dos resultados em relação às informações iniciais, tampouco uma análise dos procedimentos adotados.

Como resposta final ao problema, o grupo elaborou uma ilustração para a rampa (Figura 5), com base nas medidas obtidas durante o processo de resolução. Justificaram que, por estarem em conformidade com os critérios estabelecidos pela norma NBR 9050 (conforme apresentado na Figura 3), os resultados seriam aceitáveis e a rampa projetada atenderia aos requisitos de acessibilidade.

Figura 5: Resposta apresentada pelo Grupo 1

Fonte: Relatório dos alunos

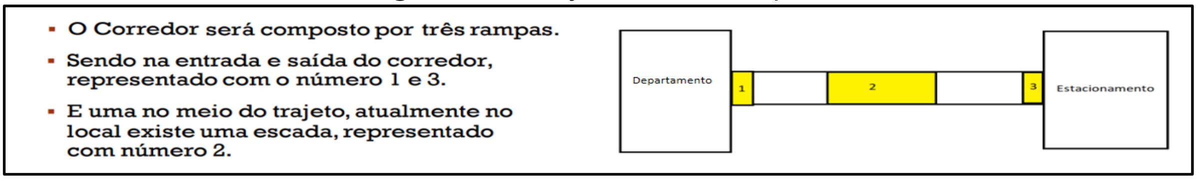
O segundo grupo investigou a viabilidade da construção de uma rampa de acessibilidade no estacionamento da universidade, local que apresentava diversos degraus e dificultava o acesso até o departamento onde assistiam às aulas (Figura 6). O desenvolvimento da atividade seguiu uma estrutura semelhante à do Grupo 1; no entanto, este grupo enfrentou maiores dificuldades para representar matematicamente a situação.

Figura 6: Local escolhido pelo Grupo 2

Fonte: Relatório dos alunos

Para dar início à resolução, o grupo elaborou um esboço ilustrativo com as indicações necessárias para tornar o local acessível, conforme apresentado na Figura 7. Em seguida, realizaram a coleta das medidas necessárias para o planejamento e a construção das rampas. Com base nas medições realizadas, determinaram que as rampas 1 e 3 deveriam ter 14 centímetros de altura e 168 centímetros de comprimento horizontal, enquanto a rampa 2 apresentaria uma altura de 50 centímetros e um comprimento horizontal de 600 centímetros.

Figura 7: Planejamento do Grupo 2



Fonte: Relatório dos alunos

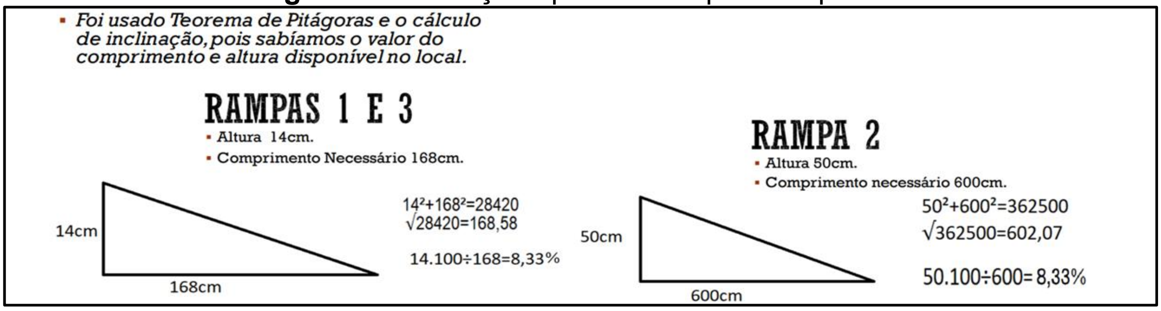
Após a coleta dos dados, o grupo apresentou grandes dificuldades na etapa de matematização da situação, como evidencia o Diálogo 4.

> ***Diálogo 4***
> *Carla: Professor, não estamos conseguindo usar nada da matemática.*
> *Professor: Olhem a situação: que comportamento ela apresenta? Qual é o formato do objeto que estamos estudando?*
> *Maria: Não sei como fazer isso... faltam medidas.*
> *Carla: Dá para usar os triângulos, mas como exatamente?*
> *Professor: Pensem no que vocês precisam. O que estão tentando responder?*

No Diálogo 4, os alunos demonstram dificuldades em estabelecer relações entre a situação proposta e conceitos matemáticos. A aluna Carla chega a identificar uma possível relação com triângulos, mas não consegue desenvolver essa associação de forma a representar a situação por meio desse conceito matemático.

Com o auxílio do professor e a troca de ideias com outros grupos, os alunos tiveram a iniciativa de utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar as medidas que estavam faltando nas rampas. A partir disso, também conseguiram calcular a inclinação de cada uma delas, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8: Resolução apresentada pelo Grupo 2



Fonte: Relatório dos alunos

O fato de o grupo ter conseguido avançar na resolução apenas com a intervenção do professor e a troca de informações com os outros grupos evidencia a dificuldade dos alunos em estabelecer conexões entre a situação e os conceitos matemáticos, ou seja, em visualizar matematicamente o problema - aspecto já apontado por Kadijević (2009) como um obstáculo recorrente em atividades de modelagem matemática.

Embora o grupo tenha realizado a resolução aplicando o Teorema de Pitágoras, o professor percebeu que os alunos ainda não haviam compreendido a importância de apresentar uma representação matemática que descrevesse a situação de forma geral. Diante disso, interveio com o seguinte questionamento: *Qual é o modelo matemático da situação estudada por vocês? De que modo vocês podem expressar algebricamente os cálculos?* Essa intervenção desencadeou o diálogo a seguir:

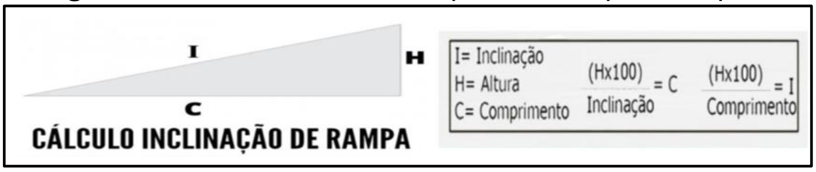
Diálogo 5
Ana: O Teorema de Pitágoras e o cálculo da inclinação da rampa, professor!
Professor: E o que representam os valores que vocês utilizaram? Podemos dar nomes a eles? Seriam as variáveis?

Francisco: Professor, as variáveis são as letras? Então dá para escrever cada valor assim.

Os Diálogos 4 e 5 indicam que os alunos ainda não haviam compreendido claramente a relação entre a matemática e a situação em estudo, nem como utilizar os conceitos matemáticos para resolver o problema por meio de um modelo adequado. Embora o grupo não tenha apresentado dificuldades em realizar os cálculos, demonstrou limitações na elaboração de um modelo que representasse a situação analisada.

Com o objetivo de auxiliar os alunos na definição das variáveis e na construção do modelo matemático, o professor solicitou que o grupo dirigisse ao quadro para, em conjunto, definirem as variáveis e construírem o modelo com base na resolução já desenvolvida (Figura 8). O modelo matemático desenvolvido com o auxílio do professor foi semelhante ao construído pelo Grupo 1 (Figura 4), no entanto, no relatório final da atividade, o grupo apresentou como modelo apenas o cálculo da inclinação, conforme mostrado na Figura 9. Isso sugere que, mesmo com o auxílio do professor, o grupo não reconheceu a importância de apresentar um modelo matemático específico para a situação analisada, optando por apresentar apenas um modelo geral.

Figura 9: Modelo matemático apresentado pelo Grupo 2



Fonte: Relatório dos alunos

A partir da resolução apresentada, o professor orientou os alunos a formularem uma resposta para o problema proposto, conforme evidenciado no Diálogo 6.

Diálogo 6
Professor: Qual é a resposta de vocês para o problema?
Maria: A rampa 1 terá 14 centímetros de altura, 168 centímetros de comprimento e inclinação de 8,33%. Para a 2, só muda a altura, que é 50 centímetros, e o comprimento, que é 600.
Professor: Vocês consideram esses valores aceitáveis para o problema que estavam resolvendo?
Francisco: Sim, professor, essa é a resposta, já finalizamos.

No Diálogo 6, observa-se que os alunos não realizaram uma análise dos resultados obtidos, tampouco refletiram sobre a adequação das respostas em relação ao problema proposto. Além de não realizarem essa avaliação final, também não demostraram perceber a importância de revisar os procedimentos adotados e confrontar os resultados com a situação inicial. As falas indicam que o grupo não retomou o problema após os cálculos, nem buscou validar as soluções encontradas, mesmo diante da intervenção do professor, que procurou estimular uma reflexão sobre a solução apresentada.

Resultados: identificando dificuldades dos alunos iniciantes em modelagem matemática

O desenvolvimento da atividade sobre rampas de acessibilidade, em especial a análise dos dois grupos observados, possibilita diagnosticar dificuldades enfrentadas pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade de modelagem.

As manifestações dos alunos no início da atividade indicam dificuldades em identificar aspectos da matemática em situações do mundo real, ou seja, em olhar para o contexto e mobilizar conceitos matemáticos como ferramentas para resolver o problema proposto. Os alunos do Grupo 2 não conseguiram, de forma autônoma, perceber que o fenômeno real poderia ser representado matematicamente, sendo necessário o auxílio do professor e de colegas. Mesmo com essa intervenção, o grupo não explicou a matematização da situação: não formulou hipóteses, não realizou simplificações, nem definiu variáveis. O Grupo 1, por sua vez, demonstrou perceber uma relação entre a situação real e a matemática, mas também não considerou explicitamente hipóteses ou simplificações em sua resolução.

Durante a fase de resolução matemática, ambos os grupos apresentaram dificuldades na análise dos resultados e na verificação de sua coerência com o problema original e com os dados levantados. Não houve, por parte dos alunos, um retorno à situação-problema para validar as soluções encontradas, mesmo diante das tentativas do professor em promover essa reflexão.

Além disso, os alunos demonstraram dificuldade na construção do modelo matemático representativo da situação. Em ambos os grupos, foi possível observar a crença de que a apresentação dos cálculos seria suficiente. O Grupo 1 deixou claro que incluiu o modelo matemático apenas por solicitação do professor, expressando insegurança quanto à própria construção. O Grupo 2 teve ainda mais dificuldade, necessitando de intervenção mais intensa do professor, que auxiliou na construção do modelo em conjunto com os alunos, no quadro. Mesmo assim, o grupo não compreendeu plenamente que a estrutura matemática construída representava o modelo da situação, o que ficou evidente no relatório final, no qual apresentaram apenas parte do modelo.

Ao final da atividade, nenhum dos grupos retomou ao problema inicial para verificar se os resultados matemáticos obtidos efetivamente respondiam à questão proposta. Em relação à validação, o Grupo 1 apresentou indícios desse processo ao justificar que as medidas obtidas estavam de acordo com as normas da NBR 9050, indicando que a rampa seria acessível. Já o Grupo 2 não demonstrou qualquer ação voltada à validação da solução.

Diante do exposto, entende-se que a atividade revelou aspectos fundamentais da modelagem matemática que devem ser considerados com atenção, como a formulação de hipóteses e simplificações na fase de matematização; a construção do modelo e a análise dos resultados na fase de resolução; e a verificação e validação dos resultados na fase de interpretação.

As ações dos alunos evidenciam dificuldades e incertezas em relação a essas fases, o que aponta para a necessidade de um suporte que contemple elementos orientadores para cada uma delas. Assim, os diagnósticos resultantes desta investigação empírica, fundamentada em pressupostos teóricos, indicam que um andaime voltado para atividades de modelagem matemática deve englobar não apenas as fases do processo, mas também os elementos associados ao desenvolvimento de cada uma delas, com o objetivo de orientar os alunos quanto às exigências de cada etapa na busca por respostas ao problema.

Nesse sentido, na fase de inteiração com a situação, o andaime deve oferecer suporte à compreensão do contexto, à coleta de dados, à formulação dos problemas, e à definição de objetivos. Por exemplo, na atividade desenvolvida sobre rampas de acessibilidade, o professor poderia fornecer orientações acerca das informações necessárias para a resolução do problema proposto.

Na fase de matematização, os elementos do andaime devem auxiliar a representação matemática da situação, na formulação de hipóteses, na definição de variáveis e na realização de simplificações, ou seja, apoiar os alunos na atribuição de significado matemático ao problema e na organização da situação real por meio da linguagem matemática. Na prática mencionada, o professor poderia disponibilizar um andaime com orientações que reforçassem a importância da definição das variáveis, da formulação de suposições e simplificações, bem como do uso de conteúdos, conceitos, regras e procedimentos matemáticos pertinentes à resolução do problema.

Já na fase de resolução, o andaime deve orientar a construção e aplicação do modelo matemático, além de incentivar a análise crítica das estratégias adotadas e dos resultados obtidos. Na atividade desenvolvida, o andaime fornecido pelo professor poderia reforçar a importância de verificar se os procedimentos escolhidos pelos alunos conduzem efetivamente a uma solução e, em caso negativo, de reconsiderar e reformular as estratégias matemáticas utilizadas.

Por fim, na fase de interpretação e validação dos resultados, o andaime deve estimular os alunos a analisar a coerência dos resultados no contexto do problema, a validar as soluções e a apresentar os resultados de forma clara e justificada. Como exemplo na prática desenvolvida, o andaime poderia incluir questionamentos orientadores, tais como: "Os resultados fazem sentido para a situação analisada?" e "A inclinação da rampa está de acordo com as normas técnicas brasileiras?", entre outros, de modo a assegurar a plausibilidade e a pertinência das soluções construídas.

Considerando as dificuldades diagnosticadas e as demandas específicas da atividade, é possível identificar elementos relevantes para compor um andaime voltado a alunos iniciantes em modelagem matemática: (i) dicas *para inteirar-se com a situação*, que promovam a reflexão sobre o contexto, auxiliem na coleta de dados e favoreçam a formulação do problema; (ii) orientações *para organizar a resolução do problema*, e que contribuam para a matematização da situação, incluindo a definição de variáveis, hipóteses e simplificações; (iii) sugestões *sobre o uso da matemática*, oferecendo caminhos possíveis para a construção do modelo matemático e para a resolução do problema; e (iv) indicações *para explicar e interpretar os resultados*, que estimulem a análise dos resultados e a sua interpretação no contexto real. Esses elementos, quando articulados com as fases do ciclo de modelagem matemática, podem contribuir para o desenvolvimento da autonomia dos alunos na realização desse tipo de atividade.

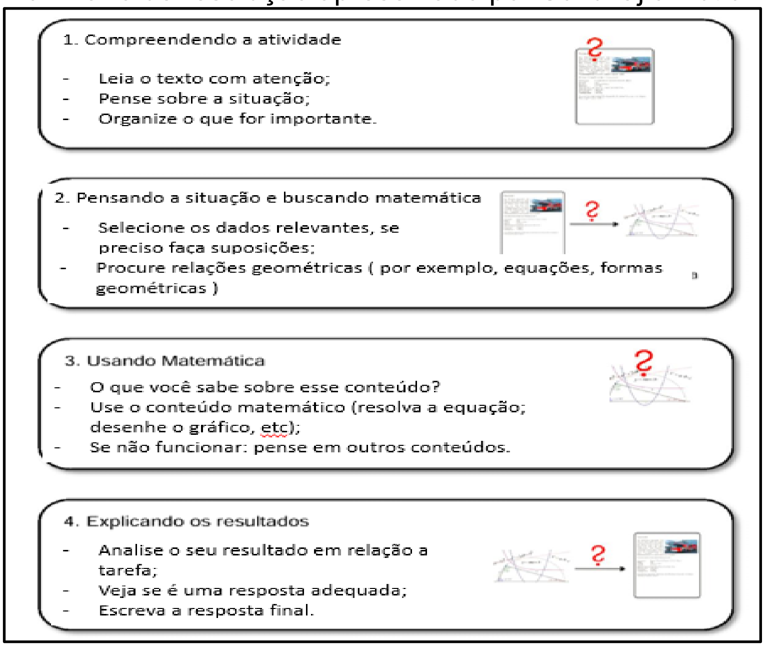
Uma proposta de andaime presente na literatura que busca identificar as dificuldades dos alunos ao longo das etapas da modelagem é o plano de resolução. Esse instrumento atua como um suporte estratégico, orientando a identificação das etapas do processo de modelagem e a definição de ações específicas a serem realizadas em cada uma delas. Na próxima seção, será analisado em que medida o plano de resolução contemplam os quatro elementos identificados a partir desta pesquisa, articulando essa análise com a atividade desenvolvida sobre rampas de acessibilidade.

Buscando, em um plano de resolução, elementos que fomentam o fazer modelagem matemática

O plano de resolução foi um dos primeiros andaimes propostos para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Ele se destaca como um suporte estratégico reconhecido na área, sendo referido tanto na literatura nacional (Almeida, Kowalek, Souza, 2024a; 2024b) quanto na literatura internacional (Beckschulte, 2020; Durandt; Lautenbach, 2020; Schukajlow *et al*., 2015).

Segundo Schukajlow *et al.* (2015), a divisão do processo de modelagem em quatro etapas facilita o enfrentamento das dificuldades dos alunos durante a atividade. Para esses autores, as ações requeridas no fazer modelagem matemática podem ser contempladas em quatro etapas: *compreendendo a tarefa, pensando a situação e buscando matemática, usando matemática e explicando os resultados*, conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10: Plano de resolução apresentado por Schukajlow *et al.* (2015)

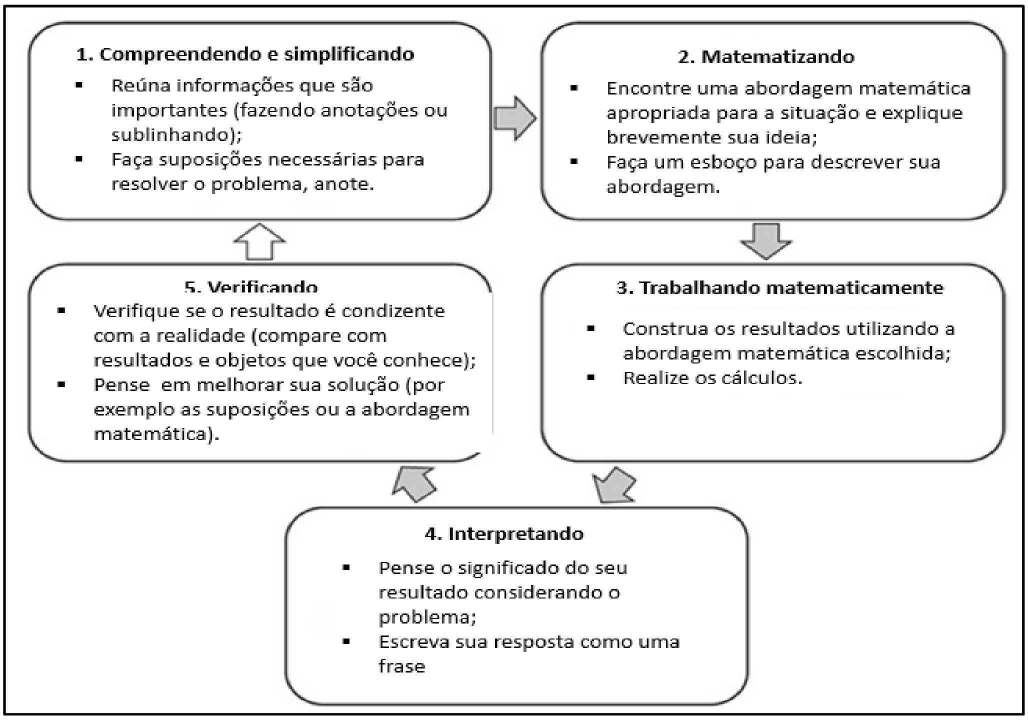


Fonte: Schukajlow *et al.* (2015, p.1244) (tradução nossa)

De acordo com Schukajlow *et al.* (2015), o plano de resolução, quando devidamente estruturado, apresenta potencial para promover competências relacionadas ao fazer modelagem, na medida em que auxilia os alunos a identificar e realizar ações estratégicas em cada fase da atividade. Além disso, tal plano permite ao professor diagnosticar as dificuldades ainda existentes e oferecer o suporte adaptativo necessário.

Com base na proposta por Schukajlow *et al.* (2015), Beckschulte (2020) apresenta um novo plano de resolução composto por cinco etapas: *compreendendo e simplificando, matematizando, trabalhando matematicamente, interpretando e verificando* (Figura 11). A autora justifica a reformulação argumentando que há necessidade de focalizar subprocessos específicos do ciclo de modelagem. Nesse plano, *interpretando* e *verificando* são etapas distintas, justamente para tornar os alunos mais conscientes da relevância e do papel de cada uma dessas fases no processo de modelagem matemática.

Figura 11: Plano de resolução apresentado por Beckschulte (2020)



Fonte: Beckschulte (2020, p. 129) (tradução nossa)

Segundo Beckschulte (2020), o plano de resolução deve conter informações claras que orientem todo o processo de resolução, sendo disponibilizado aos alunos no início da atividade, para que possam consultá-lo sempre que surgirem dúvidas ou dificuldades. Caso o suporte oferecido pelo plano não seja suficiente para superar os obstáculos identificados, cabe o professor intervir com *feedback* imediato e direcionado.

A partir dos dois planos de resolução presentes na literatura (Figura 10 e Figura 11), observa-se que o plano de Schukajlow *et al*. (2015) inicia-se pela etapa de compreensão da atividade, que envolve leitura, reflexão e organização das informações. Essas ações se aproximam do primeiro elemento identificado na pesquisa empírica: a necessidade de o plano fornecer dicas *para inteirar-se com a situação*, para que o aluno compreenda a situação-problema e que informações são necessárias para resolver o problema.

Esse primeiro elemento também está presente no plano proposto por Beckschulte (2020), na etapa *compreendendo e simplificando*. Entretanto, neste plano, o processo de inteira-se com a situação está mais voltado à coleta de dados e à seleção das informações relevantes para o problema - aspecto que, no plano de Schukajlow *et al*. (2015), são comtemplados na segunda etapa, *pensando a situação e buscando a matemática*.

O segundo elemento identificado na pesquisa refere-se à necessidade de o plano oferecer orientações *para organizar a resolução do problema*, contemplando a representação matemática da situação, bem como a definição de variáveis, hipóteses e simplificações. No plano de Schukajlow *et al*. (2015), essas orientações aparecem na segunda etapa, que sugere realizar suposições e buscar relações entre o problema e a matemática. Já no plano de Beckschulte (2020), esse elemento é abordado na etapa *matematizando,* na qual se orienta a necessidade de encontrar uma abordagem matemática apropriada para o problema e a representação, por meio de esboço, de como essa situação pode ser descrita em uma linguagem matemática.

A necessidade de fornecer orientações para a resolução do problema foi identificada no terceiro elemento: sugestões *sobre o uso da matemática*. Esse elemento envolve a indicação de caminhos para a construção do modelo matemático e a resolução do problema. No plano de Schukajlow *et al*. (2015), essas orientações estão concentradas na terceira etapa, *usando matemática,* enquanto no plano de Beckschulte (2020) aparecem na etapa *trabalhando matematicamente*. Em ambos os planos, as instruções visam apoiar a aplicação dos conceitos matemáticos para chegar a uma solução para o problema.

O quarto elemento, referente às indicações *para explicar e interpretar os* *resultados* - incluindo a análise dos resultados e a sua validade no contexto real -, corresponde à quarta etapa do plano de Schukajlow *et al*. (2015), *explicando os resultados*. Nessa etapa, os autores sugerem reflexões sobre a atividade e a resposta obtida, considerando sua adequação ao problema inicial. No plano de Beckschulte (2020), esse elemento está contemplado em duas etapas distintas: *interpretando* e *verificando*. A etapa *interpretando* orienta a análise da resposta final em relação à situação-problema, enquanto a etapa *verificando* propõe a revisão de todo o processo de resolução e a reflexão se o resultado encontrado é real e aceitável ao problema inicial.

Considerando o exposto, observa-se que o plano de Schukajlow *et al*. (2015) contempla os quatro elementos identificados na pesquisa empírica, o que o torna um andaime relevante para auxiliar alunos iniciantes em modelagem matemática. Na etapa 1 (*compreendendo a atividade*) apresenta instruções fundamentais para o início da atividade, tais como: *"Leia o texto com atenção!"*, *"Pense sobre a situação"* e *"Organize o que for importante"*. Essas orientações são essenciais para que os alunos se inteirem com a temática proposta, aspectos do primeiro elemento. Na etapa 2 (*pensando a situação e buscando matemática*), encontram-se orientações que auxiliam na organização da resolução do problema (segundo elemento), como: "*Selecione* os *dados relevantes, se preciso faça suposições"* e "*Procure relações geométricas*". A etapa 3 (*usando matemática*) fornece sugestões relacionadas ao uso da matemática (terceiro elemento), exemplificadas por: *"O que você sabe sobre esse conteúdo?"* e "*Se não funcionar: pense em outros conhecidos"*. Por fim, a etapa 4 (*explicando os resultados*) contempla o quarto elemento, ao oferecer orientações para a explicação e interpretação dos resultados: *"Analise o seu resultado em relação a tarefa", "Veja se é uma resposta adequada*" e *"Escreva a resposta final".*

De maneira semelhante, os elementos identificados também estão presentes no plano de Beckschulte (2020). Na etapa 1 (*compreendendo e simplificando*), observam-se o primeiro e o segundo elementos por meio de orientações como: "*Reúna informações que são importantes*" e "*Faça suposições necessárias para resolver o problema, anote*". Já a etapa 2 (*matematizando*), encontram-se o segundo e o terceiro elementos, com indicações do tipo: "*Encontre uma abordagem matemática apropriada para a situação e explique brevemente a sua ideia*" e "*Faça um esboço para descrever sua abordagem*". A etapa 3 (*trabalhando matematicamente*) corresponde ao terceiro elemento, com as orientações: "*Construa os resultados* *utilizando a abordagem matemática escolhida*” e “*Realize os cálculos*”. Por fim, o quarto elemento está presente nas etapas 4 e 5 (*interpretando e verificando*), através de sugestões como: “*Pense o significado do seu resultado considerando o problema*”, “*Escreva sua resposta como uma frase*”, “*Verifique se o resultado é condizente com a realidade*” e “*Pense em melhorar sua solução*”.

A partir dessa análise, apresentamos na Figura 12 um plano de resolução elaborado para orientar o desenvolvimento da atividade sobre rampas de acessibilidade, considerando os quatro elementos identificados na pesquisa.

Figura 12: Plano de resolução apresentado pelos autores para o desenvolvimento da atividade rampas de acessibilidade

PLANO DE RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE “RAMPAS DE ACESSIBILIDADE”

1) Para inteirar-se com a situação

- Leia atentamente o texto informativo.
- Identifique as informações necessárias para a resolução do problema (por exemplo: local de instalação da rampa, suas medidas e o ângulo de inclinação).

2) Para organizar a resolução do problema

- Defina variáveis relevantes para a resolução do problema e formule suposições bem fundamentadas, como o comprimento máximo e a inclinação da rampa. Considere, se necessário, simplificações (por exemplo, a presença ou não de corrimãos).
- Escolha os conteúdos, conceitos, regras e procedimentos matemáticos adequados para a resolução do problema com base na organização realizada (por exemplo: conversão de unidades e trigonometria no triângulo retângulo).

3) Sobre o uso da matemática

- Resolva o problema a partir das escolhas matemáticas realizadas. Verifique se os procedimentos adotados produziram uma solução. Caso necessário, revise os procedimentos ou complemente as informações utilizadas.
- Escreva uma resposta para o problema.

4) Para explicar e interpretar os resultados

- Reflita criticamente: a resposta obtida é coerente com o contexto do problema? (por exemplo, os valores calculados são compatíveis com a realidade?).
- Como assegurar que a resposta está correta? (por exemplo, utilize normas técnicas brasileiras).
- Escreva a resposta final para o problema.

Fonte: Os autores

No plano da Figura 12, o elemento *(i) Para inteirar-se com a situação* reúne instruções iniciais essenciais, tais como: *“Leia atentamente o texto informativo”* e *“Identifique as informações necessárias para a resolução do problema (por exemplo: local de instalação da rampa, suas medidas e o ângulo de inclinação)”.* Tais orientações promovem a compreensão da situação-problema e auxiliam na coleta e seleção de dados relevantes.

O elemento *(ii) Para organizar a resolução do problema* apresenta orientações referentes à matematização da situação, incluindo: "*Defina variáveis relevantes para a resolução do problema e formule suposições bem fundamentadas, como o comprimento máximo e a inclinação da rampa. Considere, se necessário, simplificações (por exemplo, a presença ou não de corrimãos)"* e *"Escolha os conteúdos, conceitos, regras e procedimentos matemáticos adequados para a resolução do problema com base na organização realizada (por exemplo: conversão de unidades e trigonometria no triângulo retângulo)".* Essas orientações favorecem a definição de variáveis, hipóteses e simplificações necessárias à estruturação do modelo.

O elemento *(iii) Sobre o uso da matemática* oferece sugestões e caminhos possíveis tanto para a construção do modelo matemático quanto para a resolução do problema. Entre as instruções, tem-se: "*Resolva o problema a partir das escolhas matemáticas realizadas. Verifique se os procedimentos adotados produziram uma solução. Caso necessário, revise os procedimentos ou complemente as informações utilizadas"* e *"Escreva uma resposta para o problema".* Esse conjunto de ações ampara o aluno na execução dos procedimentos matemáticos e no monitoramento da própria resolução.

Por fim, o elemento *(iv) Para explicar e interpretar os resultados* apresenta indicações que incentivam a análise crítica e a contextualização dos resultados obtidos, tais como: *"Reflita criticamente: a resposta obtida é coerente com o contexto do problema? (por exemplo, os valores calculados são compatíveis com a realidade?)"*; *"Como assegurar que a resposta está correta? (por exemplo, utilize normas técnicas brasileiras)"* e *"Escreva a resposta final para o problema".*

Em síntese, o plano de resolução apresentado na Figura 12, concebido como um ciclo simplificado de modelagem matemática, constitui um suporte eficaz para orientar decisões relevantes durante a realização da atividade sobre rampas de acessibilidade, configurando-se como um instrumento valioso especialmente para alunos iniciantes nesse tipo de atividade.

Considerações Finais

As discussões no presente artigo tiveram como objetivo, a partir de uma pesquisa empírica, diagnosticar as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Com base nessas dificuldades, foram caracterizados elementos que podem ajudar o aluno no enfrentamento e na superação dessas dificuldades, podendo, portanto, ser incluídos na estruturação de andaimes para atividades de modelagem.

Diante das dificuldades diagnosticadas e das demandas específicas da atividade de modelagem, foram identificados quatro elementos considerados relevantes para compor um andaime voltado a alunos iniciantes em modelagem matemática. Esses elementos são: (*i) dicas para inteirar-se com a situação, (ii) orientações para organizar a resolução do problema; (iii) sugestões sobre o uso da matemática* e *(iv) indicações para explicar e interpretar os resultados.*

Com bases nesses elementos, foram analisados planos de resolução propostos por Schukajlow *et al*. (2015) e Beckschulte (2020), a fim de verificar como esses suportes contemplam os aspectos identificados empiricamente. Como resultado, verificou-se que ambos os planos abrangem, de modo geral, os quatro elementos propostos, por meio de ações e orientações distribuídas em suas respectivas etapas.

Assim, o plano de resolução configura-se como um suporte promissor para orientar os alunos em decisões relevantes durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, constituindo um excelente instrumento para alunos iniciantes neste tipo de atividade. Sua estrutura sistematiza orientações que auxiliam na superação de dificuldades e na minimização de obstáculos comumente enfrentados pelos alunos durante o processo de resolução.

Ressaltamos, ainda, que a investigação empírica converge com os resultados apresentados por Schukajlow *et al*. (2015), ao indicar que um andaime eficaz para atividades de modelagem matemática deve conter os próprios elementos do ciclo de modelagem, de modo a oferecer assistência estratégica tanto na identificação das etapas quanto na definição das ações a serem realizadas em cada etapa delas.

Contudo, para além dos aspectos relativos ao fazer modelagem matemática, defendemos que a construção de andaimes deve também considerar as capacidades e dificuldades dos alunos, as especificidades da atividade proposta e o contexto de desenvolvimento. Conforme aponta Beckschulte (2020), só é possível um auxílio completo por meio de andaimes em sala de aula se o mesmo contemplar todas as demandas desse cenário, caso contrário, sua atuação ficará restrita a aspectos pontuais.

É neste sentido que pesquisas futuras precisam avançar considerando o aspecto contingente que o uso de andaimes deve incluir, considerando sua atuação no suporte aos alunos no decorrer de sua realização de atividades de modelagem em diferentes estágios de sua formação matemática.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. de; KOWALEK, R. M.; SOUZA, F. L. de. Suporte em atividades de modelagem matemática: olhar sobre um plano de resolução. **Ensino e Tecnologia em Revista**, Londrina, v. 8, n. 2, p. 318-336, 2024a.

ALMEIDA, L. M. W. de; KOWALEK, R. M.; SOUZA, F. L. de. Intervenção docente em atividades de modelagem matemática e o uso de andaimes. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIPEM, 9., 2024, Natal, **Anais...** Natal, 2024b.

ALMEIDA, L. M. W. A intervenção do professor em atividades de modelagem matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CNMEM, 13., 2023, Porto Alegre. ***Anais...*** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2023.

ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. **Vydia**, v. 42, n. 2, p. 121-145, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; KOWALEK, R. M. O processo de validação em atividades de modelagem matemática: em busca de um framework. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 26, n. 1, 2024.

ALMEIDA, L. M. W.; DE CASTRO, É. M. V.; DA SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P da. **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BECKSCHULTE, C. Mathematical modelling with a solution plan: an intervention study about the development of grade 9 students' modelling competencies. **Springer**, p.129-138, 2020.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: S. J. Cho (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Tradução: Maria João Alvarez; Sara Bahia dos Santos; Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

DURANDT, R.; LAUTENBACH, G. Strategic support to students’ competency development in the mathematical modelling process: a qualitative study. **Perspectives in Education**, v.38, n.1, p. 211–223, 2020.

GAIMME - **Guidelines for assessment & instructions in mathematics modeling education**. NCTM, 2016.

GARNICA, A.V. M. Contribution to the qualitative research based on phenomenology to the scientific practice of mathematics education. In MALARA, N. **An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Proceedings of working group 25. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 8., 1996, Modena. Modena: University of Modena, p. 49-64, 1996.

GEIGER, V.; GALBRAITH, P.; NISS, M.; DELZOPPO, C. Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. **Educational Studies in Mathematics**, v. 109, n. 2, p. 313-336, 2022.

JADALLAH, M.; ANDERSON, R. C.; NGUYEN-JANIEL, K., MILLER, B. W., KIM, I. -H., KUO, L. -J., et al. Influence of a teacher's scaffolding moves during child-led small-group discussion. **American Educational Research Journal**, v. 48, n. 1, p.194–230, 2011.

JANKVIST, U. T.; NISS, M. Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. **International Journal of mathematical education in science and technology**, v. 51, n. 4, p. 467-496, 2020.

JUPRI, Al; DRIJVERS, Paul. Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 12, n. 9, p. 2481-2502, 2016.

KADIJEVIĆ, Đ. Modelagem simples de planilhas por alunos de graduação em administração do primeiro ano: Dificuldades na transição da declaração do problema do mundo real para o modelo matemático. In: **International Congress On Mathematical Education**, 11., 2009, Roskilde. Proceedings… Roskilde: University of Roskilde, p. 241-248, 2009.

SCHUKAJLOW, S.; KOLTER, J.; BLUM, W. Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, p.1241–1254, 2015.

SOON, W.; LIOE, L. T.; MCINNES, B. Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modelling. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 42, n. 8, p. 1023-1039, 2011.

STENDER, P.; KROSANKE, N.; KAISER, G. Scaffolding complex modelling processes: an in-depth study. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education**. Cham: Springer, p. 467–477, 2017.

STENDER, S.; KAISER, G. Scaffolding in complex modelling situations. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, n. 7, 2015.

TROPPER, N.; LEISS, D.; HANZE, M. Teachers' temporary support and worked-out examples as elements of scaffolding in mathematical modeling. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, n. 7, p. 1225-1240, 2015.

VAN DE POL, J.; VOLMAN, M.; BEISHUIZEN, J. Patterns of contingent teaching in teacher-student interaction**. Learning and Instruction**, v. 21, n. 1, p. 46–57, 2011.

VAN DE POL, J.; VOLMAN, M.; BEISHUIZEN, J. Scaffolding in teacher-student interaction: A decade of research. **Educational Psychology Review**, v. 22, p. 271–297, 2010.

WOOD, D.; BRUNER, J.; ROSS, G. The role of tutoring in problem solving. **Child Psychology and Psychiatry**, v. 17, p. 88–10, 1976.