



Edição Especial

X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
Universidade Estadual do Norte do Paraná - Cornélio Procopio (PR), 2024

O GEOGEBRA NA REORGANIZAÇÃO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA INTEGRADA À EDUCAÇÃO STEAM

*GEOGEBRA IN THE REORGANIZATION OF A MATHEMATICAL MODELLING
ACTIVITY INTEGRATED INTO STEAM EDUCATION*

Júlia Maria Alves Massoni¹
Karina Alessandra Pessoa da Silva²

Resumo

Neste artigo apresentou-se uma investigação que analisou a implementação do software GeoGebra na reorganização de uma atividade de modelagem matemática integrada à Educação STEAM, desenvolvida com estudantes de Engenharia de Materiais na disciplina de Cálculo 1. A modelagem matemática foi compreendida como uma alternativa pedagógica que mobiliza procedimentos de matematização, interpretação de dados e tratamento matemático para representar e resolver problemas reais, podendo ser potencializada por ferramentas digitais que favorecem visualização, manipulação e experimentação. A pesquisa, de natureza qualitativa e interpretativa, fundamentou-se na releitura de uma atividade presente na literatura do EPMEM e envolveu observações de aula, registros produzidos pelos estudantes e construções digitais elaboradas no GeoGebra. A prática permitiu o desenvolvimento de curvas ajustadas, análise gráfica e construção de um protótipo digital de sólido de revolução, o que ampliou a compreensão dos conceitos matemáticos associados ao tema. Os resultados evidenciaram que o uso do software contribuiu para tornar o processo de modelagem mais dinâmico e investigativo, promovendo articulação entre Matemática, Engenharia e Tecnologia. Concluiu-se que a integração entre Modelagem Matemática, Educação STEAM e recursos digitais potencializa a aprendizagem, favorece o engajamento discente e amplia a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos no Ensino Superior.

¹ Estudante de Engenharia Química, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Londrina.

² Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Londrina.



X EPMEM

Encontro Paranaense de Modelagem
na Educação Matemática

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; Sólido de Revolução; Protótipo.

Abstract

In this article, an investigation was presented on the implementation of GeoGebra software in the development of a mathematical modelling activity integrated into STEAM Education. Mathematical modelling was approached as a pedagogical alternative that mobilizes procedures of mathematization and mathematical treatment to represent and solve real-world problems, and can be reorganized with the support of digital tools. The study, qualitative and interpretative in nature, was based on a reinterpretation of an activity found in the EPMEM literature and was implemented with 24 Materials Engineering students in a Calculus I course. The results showed that GeoGebra played a key role in constructing a digital prototype of a solid of revolution, allowing students to visualize aspects of the experimentation and deepen their understanding of the mathematical content involved. It was concluded that the integration of Mathematical Modelling, STEAM Education, and digital resources enhances learning, promotes student engagement, and broadens the applicability of mathematical concepts in Higher Education.

Keywords: Differential and Integral Calculus; Solid of Revolution; Prototype.

Introdução

A Modelagem Matemática como tendência da Educação Matemática tem ganhado destaque entre pesquisadores e professores interessados em implementar práticas em sala de aula que levem em consideração aspectos da matemática no contexto de situações com dados baseados na realidade. Esse fato se confirma, principalmente, pela organização de eventos específicos que relatam resultados de pesquisas e de práticas implementadas.

O Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM), em 2024, completou sua décima edição e tem se mostrado profícuo em trazer para o debate repercussões na Educação Matemática, principalmente, no estado do Paraná. Além desse evento regional, temos o Encontro Paraense de Modelagem Matemática (EPAMM) que, em 2024, completou sua nona edição; a Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), que está na décima terceira edição, em 2025; assim como a *International Conference on Teaching Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA), que em 2025 confere sua vigésima segunda edição.

Entre as vantagens destacadas sobre a implementação da modelagem matemática em sala de aula, está o despertar do interesse por parte dos alunos, possibilitando um ambiente propício à construção do conhecimento (Bassanezi,

2002). Ademais, permite criar soluções para problemas reais a partir de conteúdos matemáticos em diferentes níveis de escolaridade.

No Ensino Superior, por exemplo, as pesquisas têm mostrado resultados relevantes no que compete a articular os conteúdos matemáticos àqueles próprios dos cursos em formação (Ärlebäck; Doerr, 2018; Sepúlveda; González-Gómez; Villa-Ochoa, 2020; Silva; Borssoi; Feruzzi, 2022; González et al., 2022; Silva et al., 2023). English e Mousoulides (2015, p. 532) afirmam que “Atividades de modelagem baseadas em engenharia fornecem uma rica fonte de situações com significado que capitalizam e ampliam o aprendizado rotineiro dos alunos”. Em um projeto com alunos de Engenharia Mecânica, González et al. (2022) evidenciaram que, ao desenvolver um dispositivo de reabilitação para trombose, foram estabelecidas relações entre conhecimentos matemáticos, de engenharia e práticos.

A abordagem de conhecimentos práticos no âmbito da Engenharia tem sido o cenário para nossas investigações em uma universidade federal do Paraná, mais especificamente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável real (Cálculo 1), em que uma das autoras atua como docente desde 2014.

De modo a articular aspectos matemáticos no contexto desses cursos, temos nos pautado na Educação STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics*), uma abordagem que busca atender às necessidades atuais da sociedade, tanto a respeito da alfabetização quanto aos estudantes seguir carreira nas áreas STEAM. De acordo com Hallström e Schönborn (2019), a integração da Educação STEAM no contexto educacional pode ocorrer entre duas ou mais áreas. Os autores ressaltam que práticas pedagógicas integradas à Educação STEAM “sejam mais pesquisadas e testadas em ambientes educacionais reais” (Hallström; Schönborn, 2019, p. 9).

Neste artigo, trazemos uma análise sobre a implementação de uma atividade de modelagem matemática integrada à Educação STEAM em um ambiente educacional real constituído no âmbito de um curso de Engenharia de Materiais. As análises ampliam a discussão que realizamos no X EPMEM (Massoni; Silva, 2024). Na ocasião, foi apresentada uma releitura de uma atividade de modelagem matemática presente na literatura, em que uma proposta para o Ensino Superior foi delineada nos estudos da primeira autora deste artigo, em que o software GeoGebra auxiliou na apresentação de uma solução para o problema sobre o volume de um

sólido de revolução. Segundo o dicionário *online*, a releitura é entendida como composição ou criação de alguma coisa a partir de outra existente.

Para trazer reflexões sobre a questão de pesquisa – *De que modo o software GeoGebra promoveu o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática integrada à Educação STEAM com alunos de um curso de Engenharia?* – implementamos a proposta da releitura em uma turma com 24 alunos de um curso de Engenharia de Materiais de uma universidade federal do Paraná na disciplina de Cálculo 1, no segundo semestre letivo de 2024, após a solicitação de uma experimentação envolvendo a determinação do volume de um balão de festa.

As inferências que realizamos neste artigo são subsidiadas pelo aporte teórico que apresentamos no próximo tópico. Em seguida, discorreremos sobre os procedimentos metodológicos adotados para, então, apresentarmos as descrições da releitura e da implementação, juntamente com as análises. Finalizamos o texto com nossas considerações e as referências utilizadas.

Aporte teórico

Na literatura, existem diferentes entendimentos para o que é, por que usar e como usar a Modelagem Matemática. No que compete aos entendimentos, o delineamento configura a modelagem como uma possibilidade de articular o ensino da Matemática à realidade, em que o estudante é um agente ativo nas aulas, desenvolvendo ações investigativas. Como esse entendimento, justifica-se o seu uso em sala de aula: partir de situações-problema da realidade para ensinar matemática.

Seguindo o entendimento supracitado, assumimos o entendimento de Almeida, Silva e Vertuan (2012), em que a Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica para abordar, por meio da matemática, um problema não essencialmente matemático. De posse desse problema, busca-se uma solução por meio da representação de um modelo matemático. Para Almeida, Ramos e Silva (2021, p. 3), o “modelo matemático neste contexto é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou de uma estrutura matemática, não se restringindo a expressões algébricas, podendo ser um gráfico, uma tabela, um texto, uma imagem”. Com vistas a buscar uma solução para o problema, perpassando por um modelo matemático, alguns procedimentos e ações são realizados, tais como:

a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não (Almeida; Ferruzzi, 2009, p. 120-121).

Os procedimentos e as ações supracitados podem ser organizados em conjuntos de etapas em um esquema que orienta o desenvolvimento de atividades de modelagem – um ciclo de modelagem. Existem diferentes organizações de ciclos na literatura que podem subsidiar modeladores e professores em desenvolver ou implementar atividades em sala de aula. De modo geral, as atividades de modelagem, nos ciclos, se iniciam com uma situação ou um tema da realidade.

Considerando que a situação ou tema se aloca na realidade ou na tentativa de se aproximar da realidade, diversas áreas do conhecimento podem ser mobilizadas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Neste tocante, o aluno pode compreender como a Matemática se manifesta no cotidiano (Ávila, 2010). Essa assertiva, em certa medida, corrobora Blum e Niss (1991, p. 39) quando afirmam que a modelagem matemática “estrutura e cria uma parte da realidade, dependente do conhecimento, das intenções e dos interesses de quem soluciona o problema”. Com isso, entendemos que atividades de modelagem podem promover a integração entre diferentes áreas, como aquelas presentes no movimento conhecido como Educação STEAM, que abarca Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática.

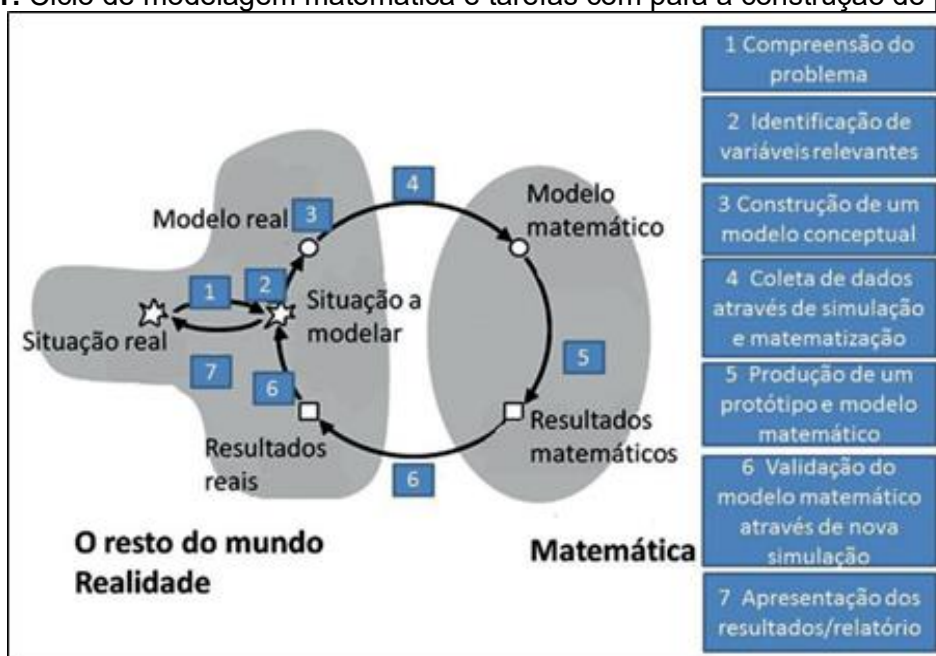
A integração entre Modelagem Matemática e Educação STEAM tem sido recorrente na literatura tanto em âmbito internacional (English; Mousoulides, 2015; English, 2017; Carreira; Baioa, 2018; Baioa; Carreira, 2019; Goos; Carreira, 2025), quanto nacional (Coelho; Góes, 2020; Silva; Borssoi; Ferruzzi, 2022; Silva; Araki; Borssoi, 2022; Pessoa; Silva, 2023), tanto que foi uma temática destacada na plenária realizada na 21ª edição da *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA), que ocorreu no Japão, no ano de 2023.

A Educação STEAM consiste em uma abordagem que incentiva a aplicação de conhecimentos de diferentes áreas, “com o objetivo de romper com o ensino tradicional passivo de ciências, no qual o aluno pouco interage com o objeto de estudo e não vê conexões com o mundo empírico” (Pugliese, 2020, p. 210). Esse movimento não se limita a um conjunto de disciplinas, mas a uma abordagem educacional

integrada que busca conectar conhecimentos e habilidades de forma interdisciplinar (Goos; Carreira, 2025).

Em um contexto de integração Educação STEAM, “o processo de modelagem matemática parece estar muito próximo do chamado processo de design de engenharia” (Baioa; Carreira, 2019, p. 11), em que múltiplas soluções são possíveis. Tanto o processo de design de engenharia quanto os encaminhamentos de uma atividade de modelagem apresentam semelhanças, pois empreendem ações interativas e oportunizam a obtenção de diferentes soluções, incentivando o pensamento sistêmico. Ambos envolvem a resolução de problemas que exigem conhecimentos em matemática, ciência e tecnologia para criar mecanismos que aprimorem nosso cotidiano (Silva; Araki; Borssoi, 2022). Baioa e Carreira (2019), fundamentadas nos procedimentos necessários para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e nas tarefas relativas à construção de protótipos no âmbito do design de engenharia, esquematizaram um ciclo de modelagem (Figura 1).

Figura 1: Ciclo de modelagem matemática e tarefas com para a construção de protótipos



Fonte: Baioa e Carreira (2019, p. 12, tradução nossa)

No ciclo, a transição entre as etapas de desenvolvimento de uma atividade de modelagem é associada a ações que, de modo geral, um engenheiro é submetido quando necessita resolver um problema. Para tanto, há a necessidade de (1) compreender o problema, (2) identificar as variáveis relevantes, (3) construir um modelo conceitual, (4) coletar dados por meio de simulação e matematização, (5)

produzir um protótipo e um modelo matemático; (6) validar o modelo matemático a partir de uma nova simulação; (7) apresentar os resultados por meio de relatório escrito ou verbal. A simulação, em muitos casos, pode ser subsidiada por ferramentas digitais que, segundo Quarder et al (2025), podem ser usadas tanto como recurso para apoiar processos de modelagem quanto como reorganizadoras do processo de modelagem que viabilizam, inclusive, a produção de protótipos.

Segundo Carreira e Baioa (2018, p. 204), um protótipo consiste na aproximação de “alguma parte da realidade ou o resultado de um processo de matematização seguindo a experimentação em um protótipo” que tem como objetivo “controlar um sistema dentro de certos limites de aproximação”. Carreira e Baioa (2018), ainda asseveram que a integração entre modelagem e Educação STEAM possibilita criar ambientes de aprendizagem dinâmicos, em que os alunos podem explorar e desenvolver suas habilidades em diversas áreas do conhecimento, ao mesmo tempo que se envolvem em atividades práticas e desafiadoras.

Neste contexto, segundo English (2017), ao implementar a Educação STEAM por meio da modelagem matemática, os currículos podem ser estruturados de modo a estimular uma abordagem investigativa e prática, que valoriza tanto a profundidade do conhecimento quanto a capacidade de aplicá-lo em contextos variados. Por exemplo, ao investigar as ações de estudantes de uma turma do 2º ano do Ensino Médio em uma atividade de modelagem cujo desafio era calcular o volume de concreto necessário para construir rampas de acessibilidade na escola, Pessoa e Silva (2023) apontaram que a abordagem STEAM favoreceu o processo de aprendizagem, ao mesmo tempo em que estimulou a motivação e o envolvimento dos alunos. Isso porque eles identificaram utilidade imediata no conteúdo trabalhado, “[...] coletando informações no local, compartilhando esses dados, organizando-os em tabelas, utilizando softwares computacionais para realizar ajustes de curvas e articulando conceitos matemáticos para apresentar soluções aos problemas analisados” (Pessoa; Silva, 2023, p. 18).

Em um contexto de ensino remoto, em uma disciplina de Cálculo 1 no Ensino Superior, durante a pandemia por Covid-19, Silva, Borssoi e Ferruzzi (2022) implementaram uma atividade de modelagem com 72 alunos de diferentes cursos de engenharia, organizados em 18 grupos. As autoras destacaram que a pandemia ofereceu uma oportunidade para experienciar e pesquisar a modelagem matemática exclusivamente mediada no espaço virtual, em que intervenções eram feitas na

plataforma Moodle, em uma wiki organizada para cada grupo. Em suas considerações, enfatizaram que a modelagem no ensino superior favoreceu aos alunos trabalhar “colaborativamente para resolver problemas” (Silva; Borssoi; Ferruzzi, 2022, p. 142). Além disso, as autoras evidenciaram que na “busca por informações sobre a situação-problema, os alunos integraram conhecimentos de diferentes áreas – técnica, científica, econômica, social, ambiental e ética – de modo a perceberem a existência da matemática como uma aliada na busca de soluções para o problema” (Silva; Borssoi; Ferruzzi, 2022, p. 142), como asseveram as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os cursos de engenharia.

Em nossa investigação, com a intenção de abarcar conceitos e técnicas empreendidos na disciplina de Cálculo 1, em um ambiente real de ensino, bem como aproveitar uma releitura em que nos apoiamos nas articulações entre Modelagem Matemática e Educação STEAM implementamos uma atividade de modelagem subsidiada por ferramentas digitais no contexto de um curso de Engenharia de Materiais, conforme descrevemos no tópico a seguir.

Encaminhamentos metodológicos

A releitura apresentada no texto do X EPMEM partiu de um trabalho presente na nona edição do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPMEM, 2022) desenvolvido por uma das integrantes de nosso grupo de pesquisa – Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem, Investigações e Tecnologia (GEPMIT) – em conjunto com sua orientadora de mestrado.

No referido trabalho, Greca e Silva (2022) relataram o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática com alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental para determinar o volume de gás hélio necessário para encher balões de mesma numeração para o desfile de 7 de setembro a ser realizado pela escola. Para isso, os alunos lançaram mão de procedimentos experimentais, tais como encher o balão com água e medir sua massa, encher o balão com água e transferir seu volume para um copo graduado e usar o princípio de Arquimedes, a partir do deslocamento da coluna de água presente em recipientes que se aproximavam do formato de um prisma e de um cilindro. Nesses diferentes procedimentos, emergiram conteúdos matemáticos de Geometria, como volume de prismas e cilindros.

Para a releitura presente nos anais do X EPMEM, vislumbramos a possibilidade de aprimorar a abordagem matemática no contexto do Ensino Superior, em que aspectos da Educação STEAM poderiam ser evidenciados. Contudo, modificações foram estruturadas acerca do experimento, das análises e da construção da prática de modo que uma abordagem utilizando o conceito de volume de sólidos de revolução pudesse ser realizada.

Neste artigo, ampliando as discussões que apresentamos em Massoni e Silva (2024), trazemos resultados de uma investigação em que nos propusemos a implementar a releitura sugerida com uma turma do segundo período, regime semestral, composta por 24 alunos de um curso de Engenharia de Materiais, em que a segunda autora deste artigo foi professora da disciplina de Cálculo 1. No conteúdo programático da disciplina, um dos Resultados de Aprendizagem (RA) elencados, consta o cálculo de volume de sólidos de revolução usando a integral definida.

A turma foi informada sobre a pesquisa que iríamos realizar, durante o semestre letivo (2024-1), de modo que receberam e assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), autorizando que os dados produzidos pudessem ser utilizados, desde que mantido o anonimato de cada estudante. Dessa forma, no corpo do texto, os alunos são referenciados por A1, A2, ..., A24. O período letivo 2024-1 da disciplina de Cálculo 1 ocorreu entre os dias 06 de março e 12 de setembro. A atividade de modelagem com a temática volume de ar em balões estava prevista no plano da disciplina e foi informada aos alunos no primeiro dia de aula, compondo o que chamamos de Desafio, com peso 1,0 no rendimento acadêmico do estudante. De antemão, o desafio estava relacionado ao desenvolvimento de uma atividade experimental que os alunos teriam de realizar, em duplas, no período de 15 a 29 de agosto de 2024. Para isso, orientações de encaminhamentos foram disponibilizadas no dia 14 de agosto na plataforma Moodle da turma (Figura 2).

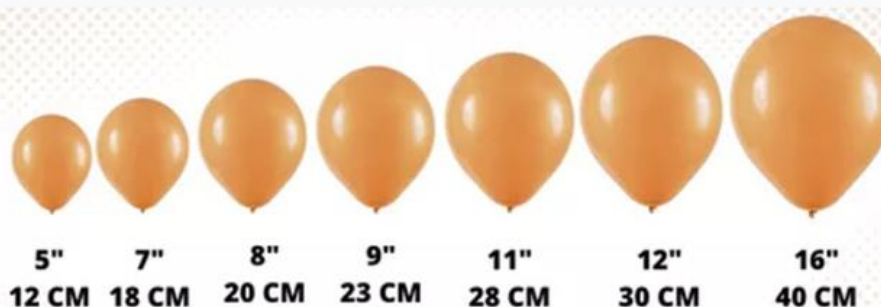
Das 12 duplas organizadas para o desenvolvimento do Desafio, três não entregaram a atividade na plataforma Moodle, justificando que não tiveram disponibilidade para se encontrarem de modo presencial. Ao analisarmos as experimentações realizadas pelas outras nove duplas, notamos que apenas duas usaram procedimentos relativos aos conteúdos de sólidos de revolução, outras aproximaram o formato do balão a um sólido regular cujos encaminhamentos de medição seguiram procedimentos já conhecidos ou mesmo utilizaram o princípio de Arquimedes, conforme consta no Quadro 1.

Figura 2: Encaminhamentos da atividade experimental disponibilizados aos alunos**DESAFIO: QUANTIDADE DE AR NO INTERIOR DE UM BALÃO**

Os balões que, geralmente são utilizados para decorar eventos como festas de aniversário, podem ser feitos de materiais, como a borracha. Existem diferentes formatos e tamanhos de balões. Dependendo do tamanho que o balão possa chegar, ou mesmo o tamanho que queremos que ele tenha, é utilizada uma certa quantidade de ar em seu interior.



Algumas empresas padronizam os balões comercializados seguindo uma numeração que os permite inflar, como a apresentada na figura abaixo.



Nesta atividade, vamos estudar a quantidade de ar que cabe em um (ou mais) balão(ões) de festa. Para isso, escolham uma (ou mais) numeração de balão para fazer a coleta de dados. Indiquem a marca escolhida e fotografem os procedimentos de coleta de dados.

Problema analisado: Qual é a quantidade de ar que o(s) balão(ões) contém(êm)?

Coletando dados: Organizem um procedimento para a coleta de dados, descrevam-no e apresentem uma solução para o problema.

Bom trabalho!!!!

Fonte: Autoras

Quadro 1: Abordagem experimental realizada pelas duplas de alunos.

Dupla	Alunos	Abordagem experimental
D1	A6, A17	Medição de 3 dimensões do balão e uso da fórmula expressão $V=D1 \times D2 \times D3 \times 0,81$ (coeficiente para a forma do balão)
D2	A7, A24	Princípio de Arquimedes (método de deslocamento de água)
D3	A1, A10	Princípio de Arquimedes (método de deslocamento de água), aproximação do balão a uma esfera para calcular seu volume e medição de massa do ar
D4	A2, A19	Cálculo do volume a partir da aproximação do balão a uma esfera
D5	A4, A23	Cálculo do volume por integral para sólido de revolução com regressão polinomial (1°, 2°, 3°, 4°, 5° graus) para modelar a forma do balão e medição de volume com copo graduado
D6	A12, A20	Cálculo do volume a partir da aproximação do balão a uma elipse
D7	A14, A22	Cálculo do volume a partir da aproximação do balão a uma elipse
D8	A3, A15	Cálculo do volume de sólido de revolução via GeoGebra com função polinomial de 4º grau e princípio de Arquimedes (método de deslocamento de água)
D9	A5, A11	Princípio de Arquimedes (método de deslocamento de água)

Fonte: Autoras

De posse desses resultados, solicitamos aos alunos, via mensagem no grupo do aplicativo *WhatsApp* da turma, que, no dia 04 de setembro de 2024, levassem para a sala de aula um dispositivo eletrônico com acesso ao GeoGebra. A solicitação esteve respaldada nas orientações presentes na proposta indicada em Massoni e Silva (2024). O desenvolvimento da atividade ocorreu em duas aulas de 50 minutos cada, em que os alunos se organizaram em duplas ou trios, podendo manter os integrantes da resolução entregue no Moodle ou não.

Para apresentarmos inferências para a questão de pesquisa – *De que modo o software GeoGebra promoveu o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática integrada à Educação STEAM com alunos de um curso de Engenharia?* – nos fundamentamos em uma abordagem de pesquisa qualitativa no sentido atribuído por Bogdan e Biklen (1994). Na pesquisa qualitativa, o pesquisador tem como objetivo compreender o comportamento e a experiência humana. Os encaminhamentos da análise seguiram uma articulação com o quadro teórico, no que compete ao ciclo de modelagem matemática e ao *design* de engenharia, segundo as ações dos estudantes em sala de aula, conforme movimento analítico que apresentamos no tópico que se segue.

Resultados e Discussão

Este tópico está organizado em dois subtópicos, em que primeiramente apresentamos a proposta de encaminhamento para uma atividade de modelagem matemática em que o GeoGebra esteve presente para determinar o volume aproximado de um sólido de revolução, a partir de uma releitura. Em seguida, discorreremos sobre a implementação que realizamos de modo a trazer reflexões para a questão de pesquisa que nos debruçamos a investigar.

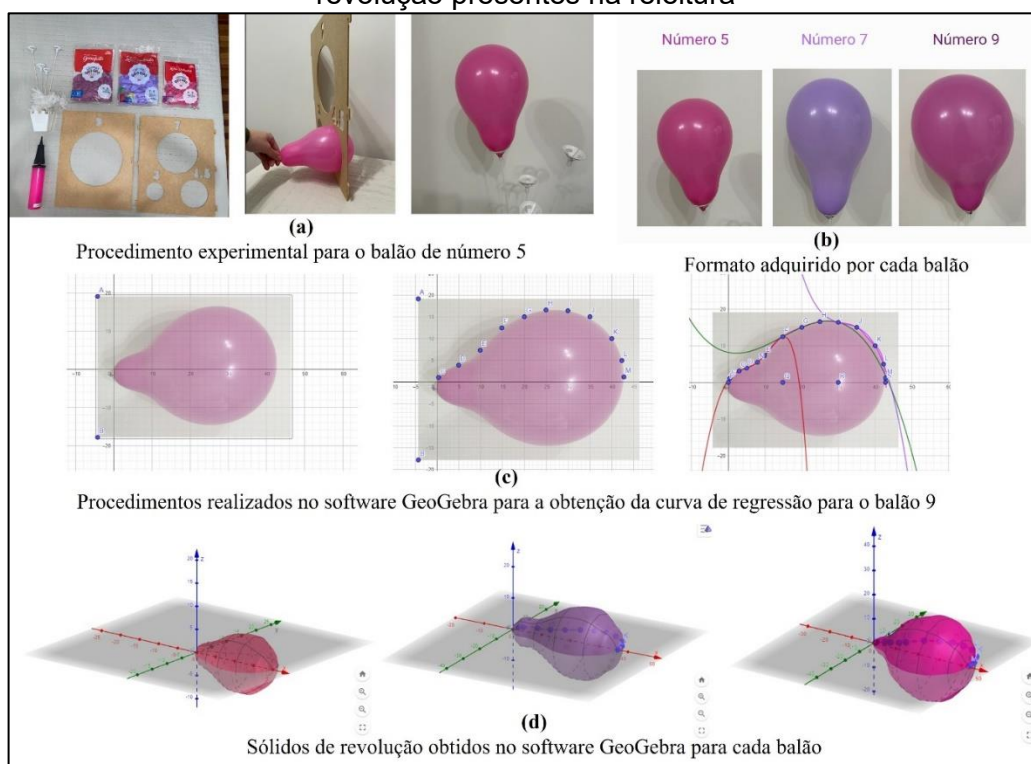
A releitura realizada: uma proposta de encaminhamento

Neste tópico, apresentamos de forma abreviada a releitura sugerida em Massoni e Silva (2024), para que o leitor se inteire dos encaminhamentos planejados. As autoras, para tanto, delinearão o problema: “Qual a relação com o volume de ar de balões e a sua numeração?”. Considerando as informações e as hipóteses já descritas no trabalho de Greca e Silva (2022), foram selecionadas diferentes

numerações de balões de festa de mesma marca para desenvolver o procedimento experimental.

Primeiramente encheu-se cada balão, adequando-o ao formato da numeração correspondente presente no gabarito para balões. Na Figura 3(a), apresentamos o procedimento para o balão de numeração 5. Considerando, por hipótese, que o formato de cada um dos balões preenchidos com ar (Figura 3(b)) poderia ser associado a um sólido de revolução, para a obtenção de seu volume, a expressão $V(x) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ foi utilizada. A função $f(x)$, presente na expressão algébrica, foi deduzida com o auxílio do software GeoGebra, por meio de uma regressão polinomial. Para isso, primeiramente, a foto de cada um dos balões foi inserida no GeoGebra, posicionando o eixo x no meio do balão, como um eixo de simetria. Em seguida, pontos foram plotados na parte superior do balão para, então, fazer uma Regressão Polinomial. No caso do balão de numeração 9 (Figura 3(c)), optamos por considerar uma função polinomial de grau 12, definida para $0 < x < 43$. Deduzida a função $f(x)$ para cada um dos balões, utilizamos na entrada do próprio software, o procedimento Revolução dos Sólidos, em que obtivemos os esquemas apresentados na Figura 3(d).

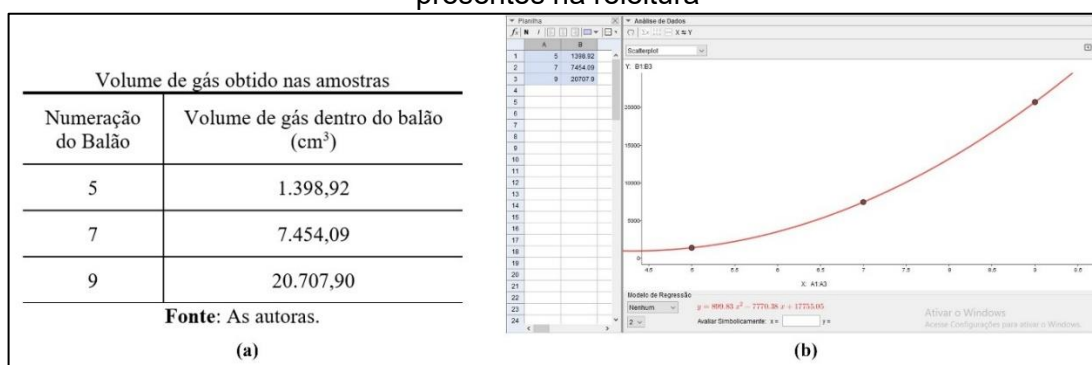
Figura 3: Encaminhamentos para a produção de dados e obtenção dos sólidos de revolução presentes na releitura



Fonte: Adaptado de Massoni e Silva (2024)

Para cada amostra foram calculadas as integrais definidas, multiplicadas por π , obtendo os volumes aproximados de ar dentro de cada balão, conforme apresentado na Figura 4(a). Há de se considerar que, quanto maior a numeração, maior é a quantidade de ar no balão. Além disso, os resultados revelaram que o volume não aumentou de forma linear entre as numerações. Com isso, ao traçar a curva de tendência que representou o volume de ar no interior de um balão de festa, dependendo da sua numeração, uma função polinomial de segundo grau – $f(x) = 899,83x^2 - 7770,38x + 17755,05$ ($5 < x < 16$) – foi considerada na regressão realizada pelo software GeoGebra, em que x representa a numeração do balão e $f(x)$ o volume de ar em seu interior (Figura 4(b)). Cabe ressaltar que, na obtenção da curva de tendência, o software considerou uma função contínua, todavia, a numeração dos balões da marca utilizada no experimento segue tendência discreta, visto que seu domínio corresponde ao conjunto dos números naturais entre 5 e 16.

Figura 4: Modelo matemático para o volume de ar nos balões de diferentes numerações presentes na releitura



Fonte: Adaptado de Massoni e Silva (2024)

O trabalho de um engenheiro requer cálculos para determinar o volume de determinados recipientes ou até mesmo o uso de *softwares*. Com isso, vislumbramos que se faz interessante abarcar uma atividade de modelagem integrada à Educação STEAM para que conceitos da disciplina de Cálculo 1 possam ser discutidos no contexto do curso de Engenharia. Desse modo, as áreas relativas à Matemática na abordagem dos cálculos; à Tecnologia no uso do software; à Engenharia, no estudo da elasticidade do balão de festa, podem ser integradas e discutidas no âmbito do curso de Engenharia de Materiais, conforme empreendimentos relatados e analisados no subtópico a seguir.

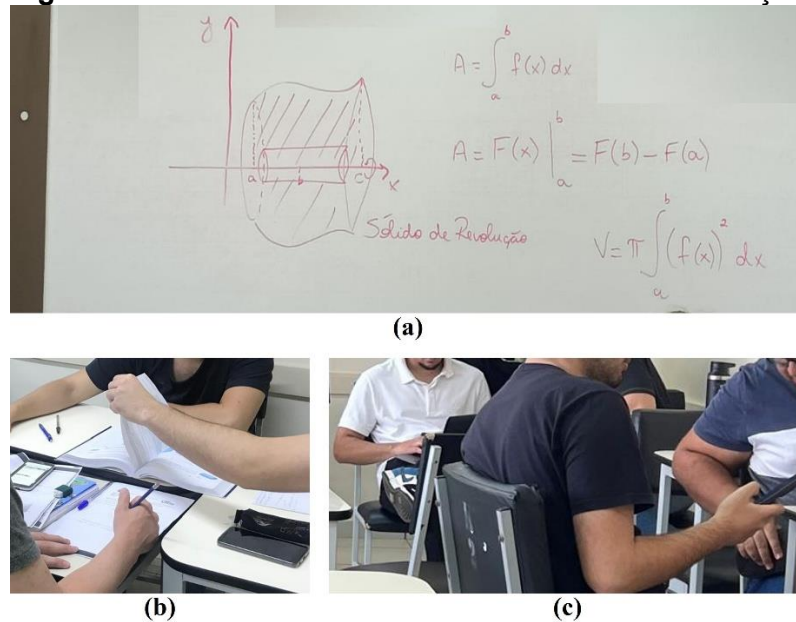
A prática implementada: discussões e análises

Em sala de aula, no dia 04 de setembro de 2024, 17 dos 24 alunos estiveram presentes e foram organizados nas duplas que desenvolveram a atividade ou em trios, se um dos integrantes não tivesse comparecido. Ao todo, foram organizados quatro duplas e três trios. A atividade foi retomada, solicitando aos alunos que mencionassem os procedimentos que tinham escolhido para desenvolver a experimentação e lhes foi questionado se não havia buscado procedimentos utilizando conteúdos da disciplina.

No dia da implementação da atividade em sala de aula, nenhum grupo mencionou a possibilidade de utilizar integrais definidas para determinar o volume de ar no balão, nem mesmo integrantes das duas duplas que tinham apresentado a resolução no Desafio. Esse fato pode estar vinculado a integrantes que faltaram no dia da implementação – A3 e A23 –, revelando que foram os responsáveis pelo desenvolvimento dessa abordagem. Entendemos que o desenvolvimento da atividade, no âmbito do Desafio, ficou “dependente do conhecimento, das intenções e dos interesses de quem soluciona o problema” (Blum; Niss, 1991, p. 39).

A professora da disciplina de Cálculo 1, então, retomou a abordagem da interpretação geométrica de integrais definidas, bem como a possibilidade de cálculo de volume de sólidos de revolução (Figura 5(a)). Os alunos, ainda, foram orientados a fazer uma leitura do livro didático adotado na disciplina – Cálculo volume 1, 7ª edição, do James Stewart – (Figura 5(b)), ou procurar em sites (Figura 5(c)) informações e aplicações de tal conteúdo, bem como resolver um exemplo: *Se girarmos a região delimitada pela curva $f(x) = x^2$, $x = 0$ e $x = 2$ em torno do eixo- x , obtemos um sólido de revolução. Determinar o seu volume.*

Essas ações, em certa medida, colocaram os alunos em ação para que pudessem “apreciar como sua aprendizagem escolar em matemática e ciências se aplica aos problemas do mundo exterior” (English; Mousoulides, 2015, p. 532), bem como familiarizá-los a consultar fontes variadas para estudo de conteúdos matemáticos do nível de escolaridade em que se encontravam. Há de se destacar que, determinar o volume do balão, proporcionou, em sala de aula, considerar uma situação-problema, em que foi possível usar “materiais concretos e físicos [que consistiu em] uma forma de investigar as propriedades matemáticas dos objetos (Carreira; Baioa, 2011, p. 214).

Figura 5: Retomada do conteúdo sobre sólidos de revolução

Fonte: Arquivo das autoras

Ao atrelar e mesmo solicitar que os alunos se encaminhassem para uma resolução que estivesse alinhada ao nível de escolaridade em que se encontravam, a professora tinha como objetivo fazê-los “refletir o que estava acontecendo no mundo real, além de ser uma adaptação da realidade sob condições controladas, uma busca pela semelhança com a realidade e uma maneira de verificar como a prática funciona na realidade” (Carreira; Baioa, 2018, p. 203), em que, conteúdos matemáticos que possam parecer distantes de alguma aplicação no contexto do curso em que estão, fossem associados a uma situação-problema que a Engenharia de Materiais poderia investigar.

Ao retomar os conceitos, os alunos se inseriram no contexto da investigação e perceberam que poderiam estimar o volume de ar no balão, tomando como hipótese que este se comportava como um sólido de revolução. Todavia, uma instabilidade foi instaurada: diferentemente do exemplo do qual calcularam o volume do sólido de revolução, não havia de, antemão, uma função que representasse o balão para uma aplicação imediata da expressão $V(x) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. Essa instabilidade se revelou relevante para a realização da “interpretação, investigação e representação matemática” (English, 2016, p. 187) iminente ao problema que estava em foco.

Com vistas a retomar a experimentação, a cada dupla ou trio foi entregue dois balões. Os alunos foram, então, orientados a encher os balões e medir suas dimensões e, em seguida, registrar com o telefone celular, por meio de uma foto, um

deles (Figura 6). Estes procedimentos precisaram ser orientados, visto que os alunos ainda não sabiam inserir imagens no GeoGebra.

Figura 6: Alunos em duplas ou trios medindo e fotografando os balões

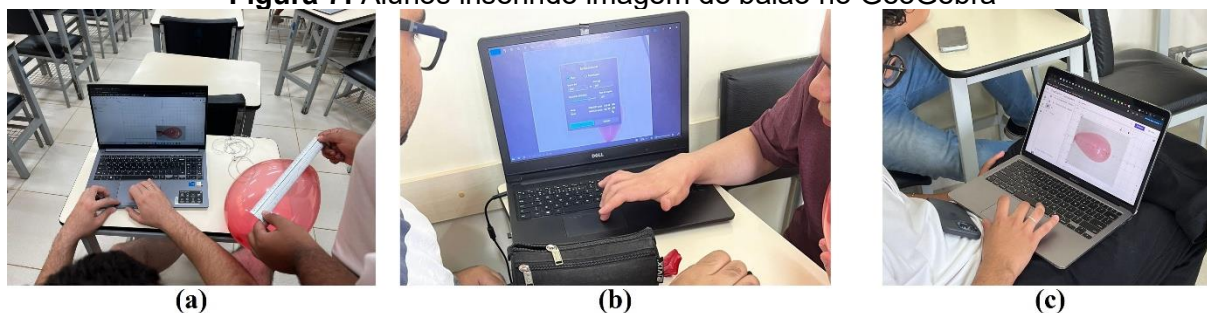


Fonte: Arquivo das autoras

Medir o balão se fez relevante para que, ao inserir a fotografia no GeoGebra, fossem mantidas as proporções. Essa ação não tinha sido prevista na releitura da atividade, porém para a implementação essa necessidade foi antecipada, evitando que os alunos precisassem realizar algumas transformações nas medidas, uma vez que não era o objetivo da prática em implementação.

No software GeoGebra, o primeiro passo foi inserir a imagem de um dos balões cheio de ar (Figura 7(a)) e, em seguida, alterar a transparência da imagem nas configurações do software (Figura 7(b)) para que os eixos ficassem visíveis através da imagem e poder posicionar o eixo x no meio do balão (Figura 7(c)). Neste momento, a matematização da situação passou a ser prioridade para os alunos, ou seja, a experimentação em uma atividade de modelagem, cuja abordagem matemática era necessária, “incentivou o trabalho prático (“mãos na massa”) (Baioa; Carreira, 2019, p. 11) para se obter uma solução para o problema.

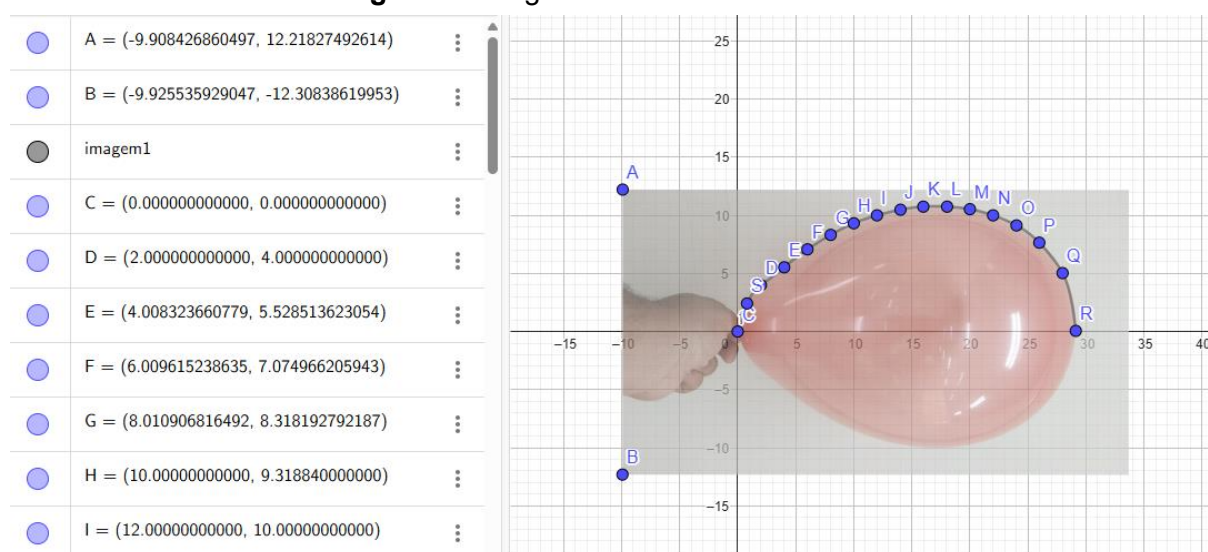
Figura 7: Alunos inserindo imagem do balão no GeoGebra



Fonte: Arquivo das autoras

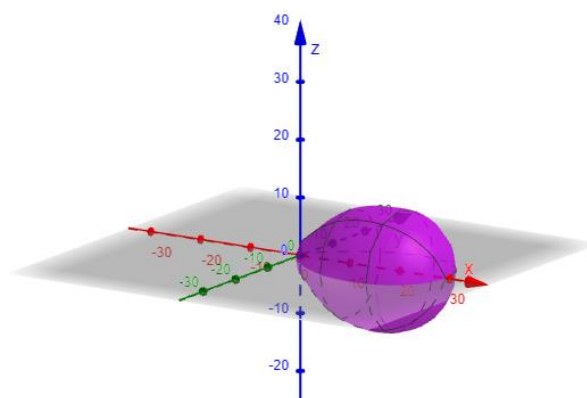
Ao medir o balão com a régua, o trio 1 (T1), formado por A17, A18 e A22, obteve um comprimento de 29 cm. O balão foi posicionado da origem (0,0) ao longo do eixo-x até o valor $x = 29,123$, com cuidado para não distorcer a imagem. De modo subsequente a esse procedimento, os alunos foram orientados a fixar os pontos A e B – extremos da foto – para travar o objeto e esse não se deslocasse após ser posicionado. O T1, então, plotou pontos na parte superior do balão (Figura 8). Utilizando o comando “RegressãoPolinomial(Lista de pontos, Grau do Polinômio)”, os alunos traçaram uma função polinomial de grau 16, limitando o intervalo de x de acordo com o comprimento do balão – $0 < x < 29,12$.

Figura 8: Imagem do balão no GeoGebra



Fonte: Relatório dos alunos

A partir da função $f(x)$, obtida para descrever a parte superior do balão, os alunos utilizaram na entrada do próprio software, o procedimento “Revolução dos Sólidos: Superfície(f , 360°, EixoX)”, este comando criou o sólido de revolução ao rotacionar a função em torno do eixo das abscissas por 360 graus, simulando o balão em investigação (Figura 9). Trata-se de um modelo matemático da situação, “um protótipo de alguma parte da realidade ou o resultado de um processo de matematização após a experimentação” (Carreira; Baioa, 2018, p. 204).

Figura 9: Sólido de revolução obtido para o balão no GeoGebra

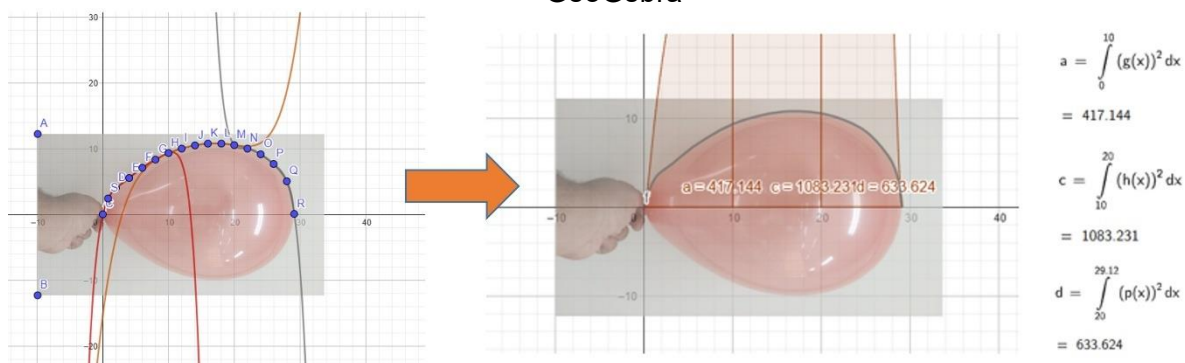
Fonte: Autores

A simulação e a experimentação em atividades de modelagem influenciaram “a produção de significado dos alunos para seus modelos e para a situação real” (Carreira; Baioa; Almeida, 2020, p. 80), pois “os significados matemáticos foram expandidos e relativizados em contraste com dados experimentais” (Carmona-Mesa; Cardona; Castrillón-Yepes, 2020, p. 31).

Para calcular a integral definida, foi necessário obter o quadrado da função polinomial de grau 16, porém, esse procedimento ficou inviável. Uma possibilidade foi solicitar o cálculo para o software. Porém, no caso do T1, o software apresentou erro e os alunos não obtiveram o valor do volume. No entanto, um encaminhamento foi considerado: dividir o sólido em outros três. Com isso, foi possível “elaborar interpretações complementares da análise matemática, por meio de gráficos derivados do fenômeno físico em estudo” (Carmona-Mesa; Cardona; Castrillón-Yepes, 2020, p. 31).

O grupo, então, gerou três funções distintas: $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$, conforme mostra a Figura 10. A primeira função passou pelos pontos de C a H, a segunda abrangeu os pontos de H a M e a última se estendeu de M a R. Dessa forma, os alunos calcularam as integrais definidas para cada uma das funções, com o auxílio do GeoGebra. Esse encaminhamento corroborou Carreira e Baioa (2011, p. 214) que afirmam que os alunos “têm a oportunidade de aprender fazendo (enquanto executam a manipulação e experimentação e engajados na conjectura e validação)”.

Figura 10: Obtenção das curvas de regressão e cálculo das integrais definidas no GeoGebra



Fonte: Relatório dos alunos

O encaminhamento da situação-problema por meio da simulação com a construção de um protótipo compreendeu uma etapa correspondente ao design de Engenharia (Baioa; Carreira, 2019), permitindo a elaboração de “uma ou mais representações de uma ou mais de suas ideias”, para obter uma solução para o que estava em investigação. Neste momento, então, ficou evidente a integração da Engenharia às outras áreas já integradas – Matemática e Ciência. Neste encaminhamento, asseveramos assim como Carmona-Mesa Cardona e Castrillón-Yepes (2020, p. 31) que “a tecnologia favoreceu uma integração mais ampla do que a ciência, pois conseguiu vincular matemática e ciência e tecnologia”.

O grupo, então, somou os resultados das integrais e, depois, multiplicou o resultado por π no Geogebra, obtendo o volume aproximado de gás dentro do balão investigado – 6704,155 cm³.

No desenvolvimento da atividade de modelagem, o software GeoGebra se tornou indispensável, uma vez que se configurou como reorganizador do processo de modelagem, ao viabilizar a visualização de uma estrutura matemática – protótipo – a partir de um objeto manipulável – balão –, bem como proporcionar simulações (Quarder et al., 2025), em que cálculos manuais seriam improváveis ou pouco práticos de serem realizados. Além disso, a dinamicidade do software proporcionou aos alunos “a possibilidade de experimentar, de visualizar e de coordenar de forma dinâmica as representações” (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 31).

Considerações finais

As reflexões apresentadas neste artigo evidenciaram a relevância da integração do software GeoGebra como reorganizador de uma atividade de modelagem matemática no contexto da Educação STEAM, especialmente em cursos de Engenharia. Ao longo da pesquisa, investigamos como o GeoGebra promoveu o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática integrada à Educação STEAM com alunos de um curso de Engenharia de Materiais.

A releitura de uma atividade de modelagem pré-existente permitiu explorar a determinação do volume de ar em balões, oferecendo um contexto real para o uso de sólidos de revolução a partir de integrais definidas, que são tópicos centrais da disciplina de Cálculo 1. A observação de que os alunos inicialmente não consideraram esses procedimentos ressaltou a importância de abordagens que estimulem a conexão entre a teoria e a prática.

A experiência com o GeoGebra ilustrou como o processo de visualização 3D, a regressão polinomial e o cálculo de integrais podem ser subsidiados, permitindo que os estudantes construíssem protótipos digitais e analisassem resultados de forma mais intuitiva. Esse tipo de abordagem “mãos na massa” e o incentivo à discussão e à pesquisa, características da Educação STEAM, foram evidenciados nas ações dos alunos.

A pesquisa contribuiu para a literatura sobre a articulação entre Modelagem Matemática e Educação STEAM no Ensino Superior, especialmente em cursos de Engenharia, um campo que demanda pensamento lógico de problemas complexos. A utilização de ferramentas digitais como o GeoGebra apoiou o processo de obtenção de solução para um problema de modelagem, bem como possibilitou a produção de protótipos e a validação de modelos matemáticos. Assim, evidenciamos o potencial de tais integrações para aprimorar a compreensão e a aplicação de conceitos matemáticos em contextos desafiadores e relevantes para a formação profissional.

Entretanto, cabe ressaltar que o foco das análises da implementação relatada e analisada neste artigo se respaldou na abordagem feita por um trio de alunos – o T1 –, em que os dados produzidos se subsidiaram nas imagens das ações dos alunos. Os desdobramentos possíveis para pesquisas futuras incluem ampliar a investigação para diferentes grupos da turma, permitindo comparar estratégias, trajetórias e decisões tomadas ao longo do ciclo de modelagem. Outra possibilidade consiste em

realizar registros de áudios e vídeos, a fim de aprofundar a análise sobre processos de argumentação, validação e tomada de decisão dos estudantes durante a atividade. Além disso, a atividade pode ser expandida para integrar conteúdos de outras disciplinas do curso de Engenharia, fortalecendo ainda mais a abordagem STEAM e ampliando conexões interdisciplinares. Finalmente, recomenda-se a realização de propostas de longa duração, de modo que os alunos possam vivenciar múltiplas iterações do ciclo de modelagem, revisitar hipóteses e aprofundar a validação de seus modelos.

Referências

- Almeida, L. M. W.; Ferruzzi, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, v. 2, n. 2, p. 117–134, 2009.
- Almeida, L. M. W.; Ramos, D. C.; Silva, K. A. P. Ensinar e aprender o fazer modelagem matemática: uma interpretação semiótica. **Ciência & Educação**, v. 27, p. 1–16, 2021.
- Almeida, L. W.; Silva, K. P.; Vertuan, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- Ávila, G. S. **Várias faces da matemática**: tópicos para licenciatura e leitura geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- Baioa, A. M.; Carreira, S. Modelação matemática experimental para um ensino integrado de STEM. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 152, p. 11–14, 2019.
- Bassanezi, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.
- Blum, W.; Niss, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, v. 22, n. 1, p. 37–68, 1991.
- Bogdan, R.; Biklen, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- Carmona-Mesa, J. A.; Cardona, M. E.; Castrillón-Yepes, A. Estudio de fenómenos físicos en la formación inicial de profesores de matemáticas: una experiencia con enfoque STEM. **Uni-Pluriversidad**, v. 20, n. 1, p. 18–38, 2020.
- Carreira, S.; Baioa, A. M. Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. **ZDM Mathematics Education**, v. 50, n. 1–2, p. 201–215, 2018.

Carreira, S.; Baioa, A. M. Students' modelling routes in the context of objects manipulation and experimentation in mathematics. In: Kaiser, G.; Blum, W.; Borromeo Ferri, R.; Stillman, G. (eds.). **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer, 2011. p. 211–220.

Carreira, S.; Baioa, A. M.; Almeida, L. M. W. Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 17, p. 67–83, 2020.

Coelho, J. R. D.; Góes, A. R. T. Proximidades e convergências entre a modelagem matemática e o STEAM. **Educação Matemática Debate**, v. 4, n. 10, p. 1–23, 2020.

English, L. D. Advancing elementary and middle school STEM education. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 15, n. 1, p. 5–24, 2017.

English, L. D. Mathematical modeling in the primary school: experiences and approaches. In: Hirsch, C. R. (ed.). *Mathematical modeling and modeling mathematics*. **Springer**, 2016. p. 78–91.

English, L. D.; Mousoulides, N. G. Bridging STEM in a real-world problem. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 20, n. 9, p. 532–539, 2015.

Goos, M.; Carreira, S. Conceptualising the Relationship Between Mathematical Modelling and Interdisciplinary STEM Education. In: Ikeda, T.; Saeki, A.; Geiger, V.; Kaiser, G. (Eds.). **International Horizons in Mathematics Modelling Education**. Switzerland: Springer, 2025, p. 21–46.

Greca, P. C. B.; Silva, K. A. P. Prática de modelagem matemática em uma atividade sobre volume de balões. In: **Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática**, 9., 2022, União da Vitória. Anais... União da Vitória: SBEM/PR, 2022.

Hallström, J.; Schönborn, K. J. Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument. **International Journal of STEM Education**, v. 6, n. 1, p. 1–10, 2019.

Massoni, J. M.; Silva, K. A. P. Atividade de modelagem matemática sobre volume de balões: uma releitura para o ensino superior. In: **Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática**, 10., 2024, Cornélio Procopio. Anais... Cornélio Procopio: SBEM/PR, 2024.

Pessoa, T. C.; Silva, K. A. P. Recursos semióticos em uma atividade de modelagem matemática integrada à Educação STEAM. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 43, p. 1–21, 2023.

Pugliese, G. O. STEM education: um panorama e sua relação com a educação brasileira. **Currículo sem Fronteiras**, v. 20, n. 1, p. 209–232, 2020.

Quarder, J.; Greefrath, G.; Gerber, S.; Siller, H. S. Pedagogical content knowledge for simulations and mathematical modelling with digital tools: a quasi-experimental study with pre-service mathematics teachers. **ZDM Mathematics Education**, v. 57, p. 395–409, 2025.

Sepúlveda, E.; González-Gómez, D.; Villa-Ochoa, J. A. Analysis of a mathematical model: opportunities for the training of food engineering students. **Mathematics**, v. 8, n. 1339, p. 1–16, 2020.

Silva, K. A. P.; Araki, P. H. H.; Borssoi, A. H. Integração STEM na educação básica veiculada por atividades de modelagem matemática com experimentação. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 24, n. 3, p. 323–354, 2022.

Silva, K. A. P.; Borssoi, A. H.; Ferruzzi, E. C. Integration of STEM education in differential and integral calculus classes: aspects evidenced in a mathematical modelling activity. **Acta Scientiae**, v. 24, p. 116–145, 2022.

Silva, K. A. P.; Dalto, J. O.; Rocha, R. A. R.; Oliveira, A. R. Experimentação em atividades de modelagem matemática no curso de licenciatura em Química. **PNA – Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, v. 17, p. 137–170, 2023.