Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino
REPPE

Edição Especial
X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
Universidade Estadual do Norte do Paraná – Cornélio Procópio (PR), 2024

ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA E O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO COM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

MATHEMATICAL MODELING ACTIVITY AND THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL REASONING WITH FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Adan Santos Martens[1]
André Luis Trevisan[2]

Resumo
Tendo em vista que o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM) deve ser um dos grandes objetivos da disciplina de Matemática, é essencial criar oportunidades para que professores desenvolvam seu próprio RM. Desse modo, o objetivo deste trabalho foi discutir os processos de RM mobilizados por um grupo de acadêmicas, futuras professoras de Matemática, ao resolverem uma atividade de Modelagem Matemática em um processo formativo, bem como as ações do professor que fomentaram discussões matemáticas e proporcionaram oportunidades de aprendizagem profissional. Os dados que compõem o corpus de análise foram coletados por meio de registros de áudio, vídeo e produção escrita, durante a resolução da atividade de Modelagem por uma das duplas e sua posterior exposição à turma. Os resultados indicam que as acadêmicas, ao terem contato inicial com as teorias acerca do RM, desenvolveram conjecturas, generalizações e justificativas. Além disso, observou-se que as ações do professor desempenharam um papel essencial ao promover discussões matemáticas e explorar situações práticas, contribuindo para o desenvolvimento do RM das acadêmicas.

[1] Mestre em Educação na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, UNIOESTE, Brasil. Professor da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico (EBTT) no Instituto Federal do Paraná, Irati, Paraná, Brasil.
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina, UEL, Paraná, Brasil. Professor na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT), Departamento de Matemática, Ponta Grossa, Paraná, Brasil.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Formação de Professores; Processos do Raciocínio matemático; Modelagem Matemática.

Abstract
Bearing in mind that the development of Mathematical Reasoning (MR) should be one of the main objectives of the Mathematics discipline, it is essential to create opportunities for teachers to develop their own MR. Thus, the objective of this study was to discuss the MR processes mobilized by a group of female academics, future Mathematics teachers, while solving a Mathematical Modeling activity during a formative process, as well as the teacher's actions that fostered mathematical discussions and provided opportunities for professional learning. The data comprising the analysis corpus were collected through audio, video, and written production records during the resolution of the Modeling activity by one of the pairs and their subsequent presentation to the class. The results indicate that the academics, upon having their first contact with MR theories, developed conjectures, generalizations, and justifications. Furthermore, it was observed that the teacher's actions played an essential role in promoting mathematical discussions and exploring practical situations, contributing to the development of the academics' MR.

Keywords: Teaching Mathematics; Teacher training; Mathematical Reasoning Processes; Mathematical modeling.

Introdução

A Modelagem Matemática[3] tem ganhado cada vez mais adeptos em todo o Brasil desde os primeiros movimentos no final dos anos 1970 e início dos anos 1980 (Biembengut, 2009). Atualmente essa temática conta com uma ampla quantidade de pesquisas com foco na Modelagem Matemática enquanto perspectiva metodológica, implicando um aumento significativo de estudos apresentados em congressos e publicados em periódicos nacionais e estrangeiros.

Esta consolidação encontra fundamentação nos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cujas propostas pedagógicas visam à melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática. Nesse contexto, a Modelagem apresenta-se como uma abordagem que propicia a efetivação dessas propostas ao promover uma prática educativa que integra conhecimentos matemáticos a situações reais, contribuindo para uma participação mais ativa dos estudantes (Fogaça et al., 2021). Além disso, ela se faz presente em resultados de pesquisas divulgados em eventos dedicados à temática, tais como a Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática –

[3] A fim de evitar repetições, ao longo do texto utilizaremos apenas o termo Modelagem ao nos referirmos a Modelagem Matemática na Educação Matemática.

CNMEM, o Encontro Paraense de Modelagem Matemática – EPAMM e o Encontro Paranaense de Modelagem Matemática na Educação Matemática – EPMEM. Estudos também apontam resultados promissores quando essa abordagem é aplicada em sala de aula, conforme destacado por Burak (2010) e Klüber (2010).

Nesse cenário, tem emergido pesquisas que sinalizam a necessidade dessa tendência[4] ser incorporada de maneira mais efetiva na sala de aula (Martens, 2018; Martens; Klüber, 2023; Martens; Klüber, 2024a). Além disso, diversos estudos têm-se centrado na compreensão da utilização dessa tendência em sala de aula pelos professores (Martens, 2018; Lima; Araújo, 2021; Mutti; Klüber, 2021; Schrenk; Vertuan, 2022). Como consequência, a formação de professores em Modelagem Matemática tem sido foco de interesse de pesquisadores, conforme apontado por diversos estudos (Barbosa, 2001; Dias, 2005; Oliveira, 2010; Martens, 2018; Malheiros; Forner; Souza, 2020).

Nessas pesquisas, dentre outras questões, o questionamento do porquê da tímida inserção da Modelagem em aulas de Matemática tem se destacado (Martens; Klüber, 2023; Martens; Klüber, 2024a). Malheiros, Forner e Souza (2020, p. 5) afirmam que, "temos várias pesquisas que mostram que a Modelagem não está na escola, por vários motivos [...]". No intuito de reverter esse quadro, defende-se que os docentes tenham a oportunidade de vivenciar a Modelagem em sala de aula, além de discutir seus desdobramentos e avanços (Barbosa, 2004; Almeida; Dias, 2004; Veronez; Rodrigues; Galdioli; Kowalek, 2023).

Sabe-se que para que os professores desenvolvam Modelagem em sala de aula, é necessário que eles vivenciem experiências com Modelagem neste ambiente. Contudo, estudos revelam que a incorporação da Modelagem em sala de aula não é uma tarefa fácil, evidenciando as dificuldades e tensões que os professores experienciam ao trabalhar com a Modelagem Matemática (Oliveira; Barbosa, 2011; Silveira; Caldeira, 2012; Pires; Silveira, 2022).

Cientes dessa problemática e imersos em um grupo de pesquisa[5] que investiga o Raciocínio Matemático e a formação de professores, este trabalho tem como objetivo discutir os processos de Raciocínio Matemático (RM) mobilizados por

[4] Adota-se o termo "tendência", conforme as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2008), que o utilizam para designar as tendências metodológicas da Educação Matemática para abordagem dos conteúdos matemáticos, diferentemente de um uso vinculado a modas ou fenômenos temporais.
[5] Mais informações sobre o grupo, acesse: <dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/5307291450401218>.

um grupo de acadêmicas, futuras professoras de Matemática, quando resolvem uma atividade de Modelagem Matemática em um processo formativo[6] bem como as ações do professor que contribuem para o alcance desses processos.

O presente trabalho é uma versão ampliada da comunicação científica apresentada no X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM). Em relação à versão original, foram aprofundadas as discussões teóricas, especialmente no que se refere às ações do professor no contexto da Modelagem Matemática, bem como foi expandida e aprimorada a análise dos dados produzidos.

Raciocínio Matemático e seus processos

O conceito de raciocínio não é único, e se podem encontrar vários significados para o termo “raciocinar”. Yackel e Hanna (2003, p. 228), ao realizarem pesquisa sobre o tema, argumentaram que “escrever sobre raciocínio em matemática é complicado pelo fato de o termo raciocínio, e o seu entendimento, serem amplamente utilizados como a suposição implícita de que há um acordo universal sobre o seu significado”.

Mesmo diante dessa ambiguidade do termo, autores tentaram defini-lo. Oliveira (2008, p. 3) define RM como “um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtém novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)”. Para Lannin, Ellis e Elliott (2011, p. 12), o Raciocínio Matemático é “um processo dinâmico envolvendo conjecturar, generalizar, investigar porquê, desenvolver e avaliar argumentos”. Nesta perspectiva, Jeannotte e Kieran (2017, p. 7) definem o RM como “um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos”.

Seguindo a mesma linha de compreensão, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p.7) apontam que “raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado”.

Nesse contexto, tendo em vista que o principal objetivo da Educação Matemática é desenvolver a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente

[6] O processo formativo foi promovido pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná, realizado de forma síncrona e assíncrona no período de 18/04/2024 e 06/06/2024, com carga horária de 24 horas.

(Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012), exige que o professor tenha conhecimento aprofundado sobre os processos do RM, saiba conceituá-los, como podem ser mobilizados junto aos seus estudantes, e como podem ser reconhecidos nos argumentos que elaboram para resolver tarefas matemáticas (Mata-Pereira; Ponte, 2011).

Jeannotte e Kieran (2017) citam como aspectos processuais do RM nove processos, organizados em dois grandes grupos: aqueles relacionados à busca por semelhanças e diferenças (generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar, classificar) e aqueles relacionados à validação (justificar, provar e provar formalmente), ambos os grupos apoiados pelo processo de exemplificar.

Para ilustrar esses processos, apresentamos no Quadro 1 a sistematização proposta por Anjos (2023), com base nas definições de Jeannotte e Kieran (2017).

Quadro 1: Processos de RM e suas definições

	Processo	**Definição**
Processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças	Generalizar	Pela busca de semelhanças e diferenças, infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto de um subconjunto deste conjunto.
	Conjecturar	Pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico provável e que tem o potencial para teorização matemática.
	Identificar um padrão	Pela busca por semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.
	Comparar	Infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas.
	Classificar	Infere, pela busca de semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades e definições matemáticas.
Processos relacionados à validação	Validar	Visa alterar o valor epistêmico (ou seja, a probabilidade ou a verdade) de uma narrativa matemática.
	Justificar	Ao pesquisar dados, garantias e apoio, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa provável para muito provável.
	Provar	Ao pesquisar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira.
	Provar formalmente	Ao procurar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira, com rigor e grau de formalismo maiores do que em provar.

Fonte: Adaptado de Anjos (2023, p. 22), com base em Jeannotte e Kieran (2017)

Com o mesmo propósito de organizar o que Jeannotte e Kieran (2017) definem como aspectos essenciais dos processos de conjecturar, generalizar e justificar, Martens e Trevisan (2023) organizaram um quadro com o intuito de sintetizar o que envolve cada um desses processos e como podem aparecer, conforme explicitado no Quadro 2.

Quadro 2: Processos de conjecturar, generalizar e justificar

<table>
<tr><td>Conjecturar</td><td rowspan="2">Envolve
- Raciocinar sobre uma relação matemática;
- Desenvolver afirmações (provisórias) ou tentativas, mesmo que não verdadeiras, sobre o problema;
- Identificar elementos em comum;
- Reconhecer padrões;
- Estender o raciocínio para outras situações;
- Verificar, validar ou refutar afirmações.</td><td rowspan="2">Pode aparecer na forma
- Verbal;
- Desenho;
- Escrita;
- Descrições verbais;
- Símbolos Numéricos ou Algébricos.</td></tr>
<tr><td>Generalizar</td></tr>
<tr><td>Justificar</td><td>Envolve
- Argumentar de maneira lógica sobre uma ideia já compreendida;
- Mostrar contraexemplos sobre uma conclusão.</td><td>Pode aparecer na forma
- Escrita;
- Palavras, números, diagramas e símbolos.</td></tr>
</table>

Fonte: Martens e Trevisan (2023, p. 43)

Uma interlocução entre a Modelagem Matemática e o RM e seus processos mostra-se profícua no âmbito da Modelagem Matemática. Apoiamo-nos em Klüber e Burak (2012, p. 482), ao apontarem que “buscar articulações com outras teorias significa buscar relações coerentes, formas de unir duas teorias, duas tendências e procurar respostas que ofereçam sentido e coerência ao fazer Modelagem”.

Esses autores ainda mencionam que, ao relacionar a Modelagem Matemática com outras teorias, busca-se, “uma maior compreensão de como isso se conduz no interior de uma prática de Modelagem [...]”. Além disso, o fato de se trabalhar a Modelagem Matemática com diferentes teorias pode, de certa forma, evidenciar “a falta de alguns elementos no âmbito da própria Modelagem, no tocante ao ensino e à aprendizagem de conteúdos matemáticos” (Klüber; Burak, 2012, p. 482).

Quando olhamos para pesquisas de Modelagem Matemática, compreendemos que não há uma interlocução entre a Modelagem Matemática e as teorias do RM para se analisar o conhecimento matemático emergido em trabalhos na área da Modelagem.

Em estreita relação com essa afirmação, em um estudo anterior (Martens; Trevisan, 2023) ao se debruçar sobre os trabalhos que discutem práticas de Modelagem em sala de aula publicados nas últimas cinco edições do Congresso Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), identificamos uma lacuna quando esses trabalhos discutem a produção do conhecimento matemático gerados pelos estudantes em atividades de Modelagem, ou seja, esses trabalhos não trazem teorias do RM para analisar o a produção matemática dos estudantes. Tal fato alinha-se ao objetivo desse estudo que se volta em discutir os processos de RM mobilizados por um grupo de acadêmicas, futuras professoras de Matemática, quando resolvem uma atividade de Modelagem Matemática em um processo formativo.

Ações do Professor que apoiam o Raciocínio Matemático

Diversas pesquisas têm destacado o papel das ações do professor no desenvolvimento do RM, como observado nos estudos de Araman, Serrazina e Ponte (2019, 2020) e Serrazina, Rodrigues e Araman (2020). Esses trabalhos abrangem experiências desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior, incluindo contextos de ensino de Cálculo Diferencial e Integral, conforme destacado por Trevisan e Volpato (2022) e Trevisan, Negrini, Falchi e Araman (2023). Tais pesquisas evidenciam as implicações dessas ações para o desenvolvimento do RM dos estudantes e a compreensão de conceitos. Entre essas ações, destaca-se o uso de questionamentos provocativos (Mata-Pereira; Ponte, 2018), que promovem interação, expressão de pensamento e justificativas por parte dos alunos, criando ambientes propícios para o desenvolvimento do RM (Araman, Serrazina e Ponte, 2019).

Com o objetivo de sistematizar as ações do professore relacionadas ao desenvolvimento do RM dos estudantes, alguns pesquisadores desenvolveram modelos conceituais para subsidiar essa análise. Por exemplo, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) propuseram um modelo estruturado em quatro dimensões:

Convidar, entendido como o envolvimento inicial dos estudantes com a situação-problema;

Guiar/Apoiar, em que o professor conduz os estudantes de forma discreta ou explícita por meio de perguntas ou intervenções;

Informar/Sugerir, quando o professor apresenta informações, estimula discussões ou valida respostas;

Desafiar, colocando os estudantes em situações que exijam avanços autônomos, como interpretar, raciocinar, argumentar ou avaliar.

Outro modelo relevante é o TMSSR (*Teacher Moves for Supporting Student Reasoning*), desenvolvido por Ellis, Özgür e Reiten (2019), que também enfatiza estratégias docentes para fomentar o RM dos estudantes. Esses modelos fornecem subsídios teóricos e práticos para compreender e aprimorar as interações pedagógicas em sala de aula.

A partir desses dois últimos modelos, Araman, Serrazina e Ponte (2019) organizaram um quadro de análise conforme apresentado no Quadro 3. Nele, os autores indicam, em simultâneo, categorias associadas ao modo como o professor pode mobilizar processos de RM e, para cada uma delas, um conjunto de ações que pode utilizar.

Quadro 3: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o Raciocínio Matemático.

CATEGORIAS	AÇÕES
Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram.
Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.
Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.

Fonte: Araman; Serrazina; Ponte (2019, p. 476)

Com base no trabalho dissertativo do primeiro autor (Martens, 2018) e nos estudos subsequentes (Martens; Klüber, 2023, 2024a, 2024b), que investigaram a formação continuada de professores em Modelagem em contexto de pesquisa, este estudo se insere em um esforço contínuo de ampliação teórica. Desde o ingresso do primeiro autor no doutorado, e por meio da imersão nas teorias estudadas no grupo de pesquisa coordenado pelo segundo autor, tem-se articulado as teorias sobre o RM e as ações docentes no campo da Modelagem Matemática. Essa articulação, como já mencionado, justifica-se pela identificação de uma lacuna na literatura, conforme destacado por Martens e Trevisan (2023). Assim, este trabalho propõe-se a contribuir para o avanço da área, ao propor uma forma de analisar o RM dos estudantes durante atividades de Modelagem, bem como ao explorar as ações do professor que potencializam a mobilização dos seus diferentes processos.

Encaminhamento metodológico

A pesquisa se enquadra em uma abordagem qualitativa, de caráter interpretativo (Bogdan; Biklen, 1994). Buscou-se compreensões sobre o desenvolvimento da atividade pelos participantes, que teve como tema a "plantação de batatas". Esta abordagem é justificada por permitir uma análise detalhada e contextualizada das práticas educativas, explorando e analisando os materiais de aula gerados e as experiências dos participantes.

O processo formativo que deu origem aos dados, foi ofertado na modalidade remota, tendo como carga horária total 24 horas destinadas a atividades síncronas e assíncronas, realizado no período de 18/04/2024 e 06/06/2024. Trata-se de um desdobramento de uma disciplina de férias que havia sido ofertada pelo primeiro autor em janeiro de 2024, específica de Modelagem Matemática, para licenciatura em Matemática em uma instituição federal localizada no Sul do país, em uma turma composta por oito acadêmicas de diferentes anos e períodos do curso.

O objetivo de ofertar o processo formativo após a disciplina de férias fundamentou-se no engajamento das acadêmicas durante o curso de Modelagem, considerando-as um público propício para promover discussões e reflexões envolvendo os processos do RM, visando ao desenvolvimento do RM das licenciandas, a partir das práticas de ensino de Matemática.

Analisamos neste trabalho uma atividade de Modelagem aplicada no primeiro encontro do processo formativo. Essa escolha se justifica por ser uma atividade que gerou muitas discussões matemáticas, o que oportunizou analisar a mobilização de diferentes processos do RM.

A atividade de Modelagem foi desenvolvida em duplas em momento síncrono, com o áudio das discussões tendo sido foi gravado e posteriormente transcrito, sendo essas falas objeto de análise neste trabalho. A atividade aplicada – Plantação de Batatas (Bassanezi, 2002), já é conhecida na literatura sobre Modelagem e é apresentada no Quadro 4.

Quadro 4: Atividade de Modelagem desenvolvida

"Meu pai planta batatas, colocando cada semente a uma distância de 30 cm, queria saber porque ele faz desta maneira". Evidentemente, não tínhamos nenhuma resposta imediata, mesmo porque nosso conhecimento, e de toda a classe, sobre batatas era muito limitado. O primeiro passo neste caso, foi procurar obter informações junto à Secretaria de Agricultura onde obtivemos os seguintes dados:

Dados:

I1 O espaçamento entre duas "ruas" deve ser, no mínimo, de 80 cm para que se possa efetuar a limpeza do "mato" (capina);

I2 Cada planta isolada produz, em média, 8.25 batatas (graúdas e miúdas);

I3 O peso médio de 8 batatas, de uma mesma planta, é de 639 gramas;

I4 Os bancos de investimentos consideram como produção normal, 800 sacas de 60 kg por alqueire plantado (um alqueire paulista mede 24200 m²);

I5 Dados experimentais – apresentados na tabela 3.1 – fornecem a relação entre espaçamento de plantas da mesma rua (em cm) e a quantidade média de batatas por planta.

Espaçamento	Produção
25	4.5
30	6.5
35	7.5
40	8.0

Tabela 3.1: Plantio de batata. Bassanezi (2002).

Mais de 40 cm entre duas plantas, elas podem ser consideradas "quase isoladas" e a variação da produção ´e insignificante. Baseados nestas informações, propusemos a seguinte questão:

Problema: Determinar o espaçamento entre duas plantas (na mesma rua) de modo que a produção de um alqueire seja máxima;

Espaçamento	Produção	Plantas	Produção/planta	Produção total (sacas)
d	*B*	*P*		P
25	4.5			
30	6.5			
35	7.5			
40	8.0		0.639	800
45	8.25			

Tabela 3.2: Espaçamento e produção de batatas. Bassanezi (2002).

Fonte: Adaptado de Bassanezi (2002).

As duplas dedicaram-se à resolução da atividade, podendo ou não requerer a intervenção do professor, dependendo das necessidades surgidas durante o processo.

Para este trabalho, focamos na análise das discussões geradas por apenas uma dupla (aqui denominadas: Acadêmica 1 e Acadêmica 2), escolha que se justifica pelo fato de essa dupla ter avançado significativamente nas discussões matemáticas, proporcionando um rico material para análise do desenvolvimento do RM das licenciandas. Além disso, é importante destacar que, em função do formato remoto da formação, observou-se a participação indireta de um ator externo: o pai de uma das acadêmicas (Acadêmica 1). Embora o pai não participe explicitamente nos áudios, há momentos na transcrição em que a Acadêmica 1 interage com ele, buscando auxílio para refletir sobre o problema. Essas interações foram consideradas na análise, pois contribuíram para o avanço da resolução por parte da acadêmica, mesmo que os áudios do pai não tenham sido diretamente analisados. Isso ocorre porque, ao dialogar com o pai, a acadêmica mobiliza conhecimentos informais e práticos, integrando-os ao processo de resolução matemática. No entanto, cabe ressaltar que a Acadêmica 1 foi sempre a protagonista nos momentos de expor suas considerações e raciocínios, garantindo que as discussões registradas refletissem sua compreensão e desenvolvimento do problema.

Para a análise dos dados, procedeu-se à leitura atenta e sistemática dos trechos transcritos originados da gravação em áudio do processo formativo. Orientados pelos objetivos da pesquisa, os dados foram organizados de forma a identificar, nos diálogos, evidências de processos de RM mobilizados pelas acadêmicas durante a resolução da atividade de Modelagem. Com base em Jeannotte e Kieran (2017), que destacam como aspectos processuais do RM os processos de generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar, classificar, justificar, provar e provar formalmente, esses elementos serviram de referencial para reconhecer e categorizar as manifestações do RM nas interações das acadêmicas.

Paralelamente, as ações do professor foram analisadas com base no quadro de análise das ações do Professor que apoiam o RM proposto por Araman, Serrazina e Ponte (2019), que abrange as categorias: *Convidar, Guiar/Apoiar, Informar/Sugerir* e *Desafiar*. Vale ressaltar que as intervenções do professor ocorreram predominantemente a partir de solicitações das acadêmicas, configurando-se como respostas direcionadas aos questionamentos ou dificuldades apresentadas pela dupla durante a resolução da atividade. Nesse contexto, a categoria "*Convidar*", que pressupõe a iniciativa do professor em propor reflexões ou explorar novas ideias, não foi observada, uma vez que as interações docentes estiveram mais alinhadas ao suporte reativo às demandas das estudantes. As categorias restantes — *Guiar/Apoiar, Informar/Sugerir* e *Desafiar* — foram amplamente mobilizadas, desempenhando papel central na mediação do desenvolvimento do RM. Essas categorias permitiram compreender como as intervenções do professor contribuíram para apoiar e promover o RM das acadêmicas, fornecendo subsídios para uma análise detalhada e fundamentada das interações ocorridas no contexto investigado.

A Caminho de uma Interpretação

A dupla analisada ao iniciar a resolução da atividade de Modelagem definiu, primeiro, a medida dos lados do retângulo que expressa um alqueire de área, conforme trecho do diálogo transcrito a seguir:

> **Acadêmica 1:** É no caso foi definido que, primeiro tem que identificar quantas plantas vão nessa rua, quantas carreiras que vai dar para depois pegar a metragem... No caso ali acho que é 101 alqueires, [corrige o dado] 120 por… 120 por 200, alguma coisa assim, né? Aí define esses 80 e daí multiplica.

Esse trecho de diálogo exprime o ponto de partida da dupla ao iniciar a resolução da atividade, e mostra que as acadêmicas estabeleceram uma primeira conjectura, ao compreender que a área de 24.200 m² pode ser representado por um retângulo de lados 120 e 200 metros. Essas medidas foram escolhidas de forma aparentemente arbitrária, refletindo uma tentativa inicial de atribuir valores concretos ao problema para facilitar os cálculos subsequentes.

Logo após a apresentação dessa conjectura, o trecho ainda ilustra o momento em que a Acadêmica 1 solicita uma intervenção do professor, apresentando um questionamento que reflete suas primeiras tentativas de explicação ou compreensão do problema. Ao dizer “120 por 200, alguma coisa assim, né?”, a acadêmica busca validar suas suposições iniciais, questionando implicitamente se as medidas dos lados estão corretas e se o raciocínio adotado até aquele ponto faz sentido. Esse questionamento específico revela uma preocupação com a coerência das dimensões atribuídas ao terreno e revela a necessidade de feedback para avançar na resolução.

Nesse contexto, o professor intervém, desempenhando um papel crucial para orientar o raciocínio da estudante.

> **Professor:** Exato! Então você tem um caminho aí. Começa-se pensando na rua, começa-se pensando, por isso que você me falou, né, no lado do alqueire, quantas ruas cabem, e o que mais? Certo? Vai pensando aí...

O trecho evidencia duas ações do professor, conforme modelo proposto por Araman, Serrazina e Ponte (2019): *Informar/Sugerir* e *Guiar/Apoiar*.

Inicialmente, ao dizer "Exato", o professor valida as ideias da aluna, reconhecendo que ela está no caminho certo. Essa validação se enquadra na ação de *Informar/Sugerir*, em que o professor busca confirmar respostas corretas fornecidas pela estudante, reforçando sua compreensão inicial. Em seguida, ao questionar "quantas ruas cabem" e orientar o pensamento da aluna para o lado do terreno, o professor utiliza a ação de *Guiar/Apoiar*. Ele conduz o raciocínio da aluna de forma explícita, focalizando aspectos importantes do problema e direcionando-a refletir sobre a relação entre os dados fornecidos pelo problema e as decisões tomadas durante o processo de Modelagem, promovendo avanços nos cálculos.

A ação de *Desafiar* se manifesta quando o professor, diante da incerteza da aluna sobre o caminho a seguir na resolução do problema, não fornece uma resposta pronta. Ao ouvir a aluna afirmar que é preciso “definir quanto que produz em um alqueire em cada espaçamento” para identificar “qual que vai conseguir produzir mais”, o professor retoma essa ideia, mas a tensiona ao exigir uma relação mais precisa entre os elementos envolvidos. Ele reafirma que “a distância interfere” e, em vez de validar a formulação vaga de “produzir mais”, lança a pergunta: “Então como que vai ter uma produção máxima dado uma melhor distância?”. Nesse movimento, o professor propõe um desafio que encoraja a reflexão e solicita justificativas para a escolha de um determinado espaçamento e pressiona por precisão conceitual, ao vincular a produção máxima não a uma simples comparação de valores, mas à ideia de que há uma distância mais adequada para alcançar esse resultado:

> **Acadêmica 1**: Sim, eu estou pensando em como, eu e a Acadêmica 2 conversamos e pelo nosso ver nós temos que definir quanto que produz em um alqueire em cada espaçamento, para a gente identificar que que produz a máxima né, no caso, qual que vai conseguir é produzir mais né. Não sei se seria isto ou não.
> **Professor**: Isso, produzir mais, porque já foi visto que a distância interfere né. A distância interfere. Então como que vai ter uma produção máxima dado uma melhor distância?

Essa sequência de ações revela como o professor equilibra validação e orientação, criando um ambiente propício para o desenvolvimento do RM. Ao guiar o pensamento da aluna sem fornecer diretamente a resposta, ele estimula autonomia e reflexão crítica, elementos fundamentais para o aprendizado matemático.

Com o decorrer da discussão, as acadêmicas avançam e começam a dizer alguns números ao se referirem às dimensões do terreno. Esse momento marca uma transição importante no diálogo, em que as estudantes passam de reflexões mais gerais para tentativas de quantificação e realização de cálculos numéricos, evidenciando seus esforços para resolver o problema.

> **Acadêmica 1:** Então, no caso é, faz o 110 né, que é a metragem do… a gente define ali um alqueire daí multiplica pelo… [vozes no fundo, provavelmente o pai ajudando-a].

O excerto apresentado revela um momento significativo na interação entre a acadêmica, seu pai e o professor, evidenciando diferentes formas de raciocínio e estratégias de resolução de problemas.

Inicialmente, observa-se que a Acadêmica 1 elabora outra conjectura para estabelecer as dimensões do terreno retangular, ao definir o valor de 110 metros como um dos lados e busca calcular o outro lado. A intenção dela aqui parece ser testar uma possível solução para o problema, mobilizando seus conhecimentos matemáticos iniciais e buscando validar suas suposições por meio de cálculos. No entanto, ao perceber dificuldades, ela recorre ao pai, que, embora não utilize métodos formais de cálculo, contribui com sua experiência prática, por meio de estimativas mentais. Essa interação ilustra como conhecimentos informais podem ser mobilizados no processo de aprendizagem, mesmo que não sejam explicitamente justificados, a acadêmica busca apoio para avançar na compreensão do problema e consolidar sua conjectura inicial.

A interação prossegue com o professor intervindo:

> **Professor:** Multiplica pelo qual?
> **Acadêmica 1:** 137 [Fala no fundo, do pai]. E daí por quantas carreiras deu? É, o comprimento dessa rua é 80?
> **Professor:** A distância entre as duas ruas é de 80 cm. Certo?
> **Acadêmica 1:** Certo? O meu pai chegou num cálculo aqui 75.625 plantas no de 40 cm. Só que ele faz a conta e não sabe me explicar como fez, ele calcula só mentalmente ali rsrs.
> **Professor:** É, e como que vocês pensaram?

Ao questionar "Multiplica pelo qual?", o professor utiliza a ação de *Guiar/Apoiar*, encorajando a acadêmica a re-elaborar sua resposta. Esse tipo de intervenção se mostrou essencial para direcionar o pensamento da estudante para encontrar o valor da medida do outro lado do terreno retangular, como mostra o decorrer da discussão em que a Acadêmica junto ao pai cita o valor de 137. Essa intervenção direciona a acadêmica a refletir sobre os passos do cálculo realizado e a justificar suas escolhas

Por fim, quando a acadêmica menciona o cálculo realizado pelo pai (75.625 plantas), o professor utiliza a ação de *Guiar/Apoiar* ao perguntar "É, e como que vocês pensaram?". Essa intervenção pressiona a acadêmica a refletir sobre os valores obtidos e apresentar justificativas para os cálculos realizados. Aqui, torna-se evidente a importância do professor em incentivar a comunicação matemática, ao promover que a estudante articule seu pensamento, valide os resultados obtidos e avance em processos de generalização e justificação, considerados centrais para o desenvolvimento do RM por Jeannotte e Kieran, bem como por Oliveira e Henriques (2021).

Esse excerto mostra como as interações entre os participantes (acadêmica, pai e professor) criam um ambiente rico para o desenvolvimento do RM. O professor, ao assumir as ações de *Guiar/Apoiar*, promove um espaço de diálogo que estimula a reflexão, a argumentação e a compreensão conceitual. Além disso, a colaboração informal do pai ressalta a relevância de contextos cotidianos e experiências práticas no processo de aprendizagem matemática.

Na sequência, a outra acadêmica da dupla faz um questionamento para a colega na intenção de encontrar um caminho para solucionar o problema, conforme a continuação do diálogo, transcrito abaixo:

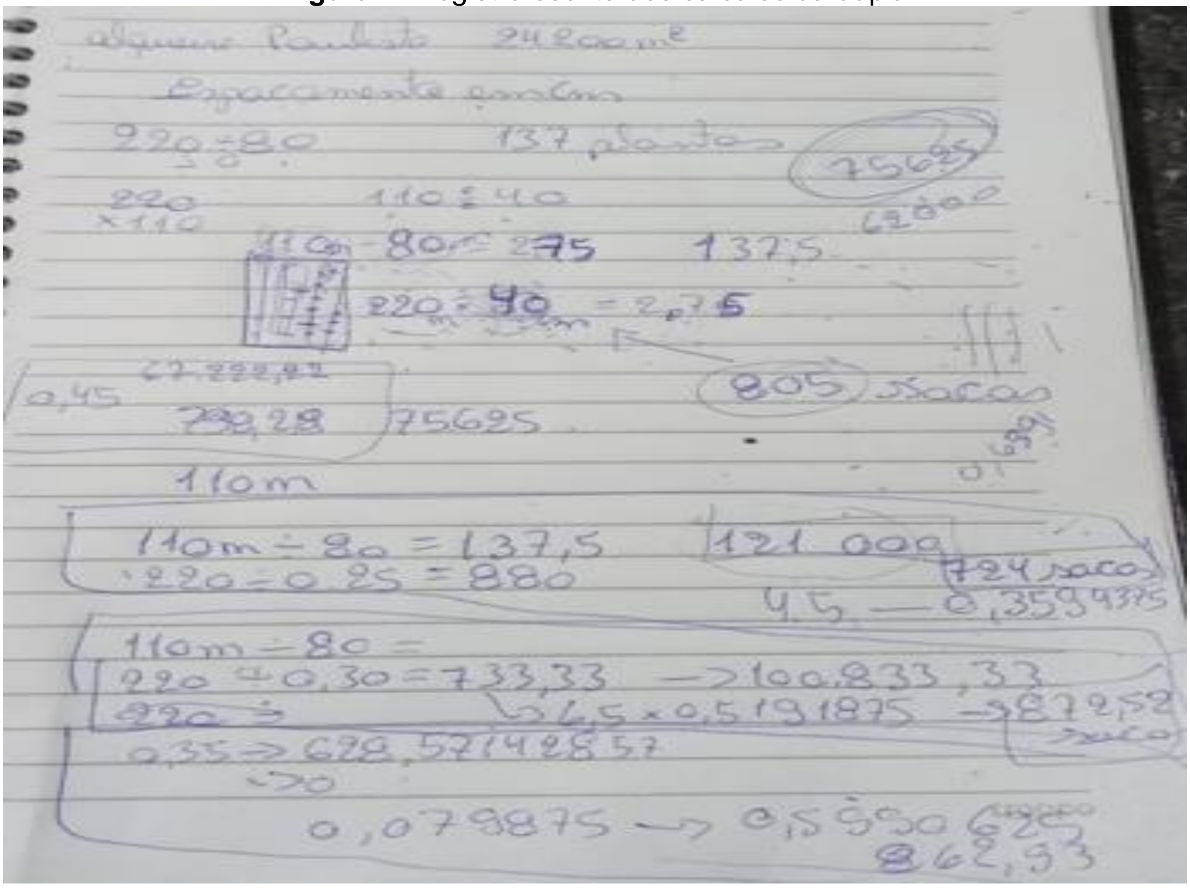
> **Acadêmica 2:** Se a gente pegar a metragem do alqueire 24.200 e dividir pelo espaçamento de 25 cm, mas tem a questão do metro, eu não pensei na questão do metro, mas se fosse fazer 24.200 dividido por 25 ele não sairia quantas plantas a gente tem nesse alqueire?

Esse trecho revela a elaboração de novas afirmações provisórias (conjecturas), por parte da Acadêmica 2, que surgem com tentativas de resolver o problema. A estudante propõe a ideia de dividir a área total do alqueire (24.200 m²) pelo espaçamento entre as plantas (25 cm), sugerindo que essa operação poderia resultar na quantidade total de plantas. Essa conjectura reflete uma abordagem inicial para quantificar as plantas, ainda que contenha uma imprecisão conceitual: a confusão entre unidades de medida (metros e centímetros).

O questionamento da acadêmica 2 leva a acadêmica 1, a compartilhar, por meio da câmera na *meet*, uma representação que havia feito no papel:

Acadêmica 1: Olha eu fiz um esquema aqui, eu vou tentar mostrar aqui para você, deixa eu virar a câmera eu não sei se dá para enxergar até porque é no celular né.

Figura 1: Registro escrito dos cálculos da dupla



Fonte: Dos autores

Então, defini como o alqueire então 110 por 220. O alqueire né. Que daí dá os 24.200 né.
Acadêmica 2: Aham.
Acadêmica 1: [continua explicando apontando no desenho projetado na câmera] as plantas, elas vão estar assim, né [desenhando linhas verticais dentro do retângulo]. No caso aqui vão estar as carreiras [indicando com a caneta para os riscos verticais dentro do retângulo desenhado] e os espaçamentos [fazendo pequenos riscos entre as linhas verticais desenhadas dentro do retângulo] de 80 cm né, que é 110 metros e aqui 80 cm [indicando no desenho a metragem da largura do terreno e a distância entre as linhas horizontais]. Então dividindo esses 110 metros por 80 cm nós vamos chegar em quantas carreiras vai dar, né? [apontando para as linhas verticais que representam as carreiras].
Acadêmica 2: Uhum.

Neste fragmento destacado, é apresentada a elaboração de uma conjectura importante para resolver a tarefa: a definição das dimensões do terreno. Em trechos anteriores, a Acadêmica 1 havia proposto inicialmente as dimensões de 120 por 200 metros, mas posteriormente abandonou essa conjectura e ajustou as medidas para 110 por 137 metros. Entretanto, essa última configuração resultaria em uma área diferente dos 24.200 m² fornecidos pelo problema. Agora, neste trecho, ela redefine as dimensões como 110 por 220 metros, validando que esse cálculo atende à condição do problema ao afirmar: *"que daí dá os 24.200 né"*.

Esse processo revela que a acadêmica passou de uma afirmação provisória para uma conclusão verdadeira, conforme destacado por Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 76), que explicam que conjecturar "envolve o raciocínio sobre as relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não se sabe se são verdadeiras". Essa evolução revela como a estudante refinou suas ideias iniciais, testando e ajustando suas conjecturas até alcançar uma solução válida.

Outro ponto relevante é o reconhecimento, por parte da Acadêmica 1, de que, ao dividir a largura do terreno (110 metros) pela distância entre as fileiras de plantas (80 cm), é possível determinar o número de fileiras que cabem no terreno. Essa afirmação pode ser interpretada como uma conjectura inicial com potencial para generalização, pois a estudante identifica uma relação matemática específica (divisão da largura pelo espaçamento) que pode ser aplicada a outros contextos semelhantes. Em outras palavras, ao perceber que essa operação funciona para calcular o número de fileiras em um terreno retangular, ela começa a explorar um princípio mais amplo, que poderia ser estendido a diferentes dimensões ou configurações de terrenos.

Além disso, esse momento evidencia uma evolução no RM da acadêmica, mas é importante esclarecer em que sentido essa evolução ocorre. Neste caso, a progressão está relacionada à articulação de conceitos geométricos (área e dimensões do terreno) com operações aritméticas (divisão), o que revela um movimento em direção a formas mais estruturadas de pensamento matemático. Essa articulação permite que a estudante vá além de uma conjectura isolada, avançando na construção de generalizações sobre como o espaçamento e as dimensões do terreno afetam o número de fileiras de plantas.

A utilização de desenhos e símbolos matemáticos também merece destaque, pois reflete a combinação de linguagens verbal, visual e simbólica para representar o problema. Ao traçar linhas verticais para indicar as fileiras e espaçamentos dentro do retângulo que representa o terreno, a Acadêmica 1 mostra como as representações visuais podem auxiliar na exploração e comunicação de ideias matemáticas. Essa prática reforça o caráter processual do RM, permitindo que a estudante organize suas conjecturas e avance na resolução do problema de forma mais clara e estruturada.

O diálogo continua avançando, no intuito de estruturar uma estratégia para calcular o número total de plantas no terreno, conforme evidenciado pelas falas das Acadêmicas:

> **Acadêmica 1:** É… E esse no caso, no caso, essa aqui é a de 40. Tá [fazendo movimentos circulares ao redor do número 40 escrito no lado do comprimento do retângulo desenhado]. Nós vamos chegar ao que, no espaçamento de cada plantinha, né [marcando pontos nas sobre as linhas verticais desenhadas dentro do retângulo]. Então se aqui cada planta tem que estar plantada 40 cm de distância, então se a gente dividisse essa metragem aqui [apontando para o comprimento do retângulo desenhado que representa o comprimento do terreno] pelos 40 cm nós vamos identificar quantas plantas vão ter assim né [fazendo movimentos horizontais com a caneta dentro das margens da largura do retângulo, saindo da borda inferior e repetindo o movimento até o lado superior do retângulo] aí depois, aqui vai dar cento e pouquinho, ainda não fiz, né. Porque vai ser 110 dividido por 0.80 e 220 dividido por 0,40 porque é centímetros e metros né. Aí enfim, a gente vai chegar no, assim que eu estava conversando aqui com meu pai que ele me auxiliou a fazer. Você acha que faz sentido?
> **Acadêmica 2:** Faz sentido, faz totalmente o sentido.
> **Acadêmica 1:** Então, eu vou, só não resolvi. Esse é o de 40 cm né que eu tô falando.

Neste trecho do diálogo, as acadêmicas discutem sobre os valores fundamentais para determinar o número de plantas que podem ser cultivadas tanto na largura quanto no comprimento do terreno retangular. Elas explicam que dividindo o comprimento do terreno, que é de 220 metros, por 0,40 metros (espaçamento entre as plantas), será possível descobrir quantas plantas cabem em cada fileira. Da mesma forma, realizam o cálculo para a largura do terreno, que possui 110 metros, dividindo-a por 0,80 metros (espaçamento entre as fileiras). Esses valores são essenciais para estruturar a solução do problema, pois permitem calcular a distribuição das plantas ao longo das dimensões do terreno.

Esse excerto do texto indica uma generalização desenvolvida pelas acadêmicas, já que a dupla reconhece padrões e estendem o raciocínio compreendido para outras situações. Mais especificamente, elas compreendem que a divisão do comprimento da dimensão do retângulo pela distância entre as fileiras resulta no número de plantas, esse cálculo vai ser utilizado para as outras distâncias que a atividade pede, sendo 25 cm, 30 cm, 35 cm e 40 cm.

Além desses processos do RM mobilizados, as acadêmicas desenvolveram justificativas que evidenciam o uso de ideias matemáticas para solucionar a atividade proposta. Um exemplo é a fala da acadêmica 1, que relatou:

> **Acadêmica 1:** Ó, eu dividi deu 805 sacas ponto 40 (805.40) né. Que ali no caso ele fala [se referindo ao enunciado da atividade], considera uma produção normal 800 sacas né.

A acadêmica descreveu o cálculo realizado para determinar o número total de sacas de batatas produzidas. Ao calcular a quantidade de plantas no terreno e posteriormente determinar o número de sacas, ela comparou seu resultado com o valor fornecido no enunciado. Esse raciocínio está alinhado com o processo de justificar uma vez que, segundo Lannin, Ellis e Elliot (2011), pois a acadêmica utilizou informações fornecidas no problema, realizou operações matemáticas e baseou-se em ideias já compreendidas para argumentar de maneira lógica.

Calcular o número total de sacas é o produto de uma análise minuciosa feita pela dupla a partir da medição dos lados do terreno de 24.200 m² de área, a determinação da quantidade de plantas que podem ser plantadas levando em consideração a distância entre elas, e a variável da produção em quilogramas que varia de acordo com o espaçamento entre as plantas.

Na sequência do diálogo, dado como certo o resultado em que chegaram, considerando a distância de 40 cm entre as plantas, a dupla começa a fazer os cálculos para o distanciamento de 30 cm e 25 cm e partem de uma ideia já compreendida, como mostra o excerto da discussão abaixo:

> **Acadêmica 1:** [...] daí então vou fazer a de 25 né, que no caso a gente pega esses 220 metros e divide por 0.25 aí eu pego e multiplico por esse 137.5 e chego na quantidade de plantas.

Essa conjectura é questionada pela acadêmica 2 em que solicita a explicação: *"de onde você tirou o 137?",* na sequência, a acadêmica 1 argumenta de maneira lógica, que reconhecemos como processo de justificação, quando a estudante atinge o total de 805 sacas, calculado com base na capacidade do terreno para alojar as plantas, a produtividade de cada planta e a quantidade de gramas produzidas por planta levando em consideração o espaçamento entre elas, como descrito no argumento da acadêmica 1 a seguir:

> **Acadêmica 1:** Deixa eu abrir aqui a câmera. Então a gente fez um esquema assim 110m por 220m um alqueire né, que dá essa metragem de 24.200 dividido por 80 porque as plantas são as ruas assim né [indicando com a caneta no desenho as linhas verticais desenhadas dentro do retângulo] então aqui eu tirei dessa divisão 110 dividido por 0,8 aí eu cheguei no 137,5 ou seja são 137.5 carreiras. Aí depois eu pego essa metragem de 220 e divido pelo espaçamento. Então eu tenho no caso essa conta que eu fiz o espaçamento de 40 cm né, divide 220 por 0.40 daí deu, agora não me lembro quanto que deu. Mas enfim, daí multiplica essas duas metragens e daí chega na quantidade de plantas. Depois eu pego esse resultado, multipliquei pelas gramas que são 0.600 e poucos e divido por 60 aí chego na quantidade de sacas que são 805 sacos. Então, é porque tem alguma carreira, às vezes que a gente nem considera né, tipo as da beirada e coisa né, não são considerados. E como é uma média de 800, então passou um pouquinho. Agora o que que eu fiz esse 110 dividido por 80 de novo que a gente já tem o resultado [aponta para o 110 escrito no caderno], o 220 dividido por 0,25 que é o espaçamento, ai eu vou multiplicar, então eu cheguei em 121 mil plantas né. Para não descobrir agora quantas sacas que deu, então eu vou ter que descobrir quantas gramas que dá, porque dá quatro pontos cinco (4.5) né quatro ponto cinco batatas e elas não vão pesar a mesma coisa do que as oito né, então vou ter que descobrir quanto que elas pesam para identificar se às vezes não vai dar a mesma quantia, né?

O excerto acima, retirado do diálogo das acadêmicas durante o trabalho em grupo, revela o processo de resolução desenvolvido pela dupla. Essa mesma linha de argumentação foi retomada por elas no momento da exposição para a sala, com o objetivo de trazer a resposta final da atividade à qual chegaram, como evidencia o trecho abaixo:

> **Acadêmica 1:** Mas enfim, então aqui para mim a que produziu mais foi a de 30 cm, no caso tinha 100833 plantas na de 30.

No fragmento anterior, que expõe a apresentação da estratégia na sala de aula virtual, é possível notar que a dupla apresenta de forma coerente como resolveram o problema, utilizando desenhos e uma descrição verbal dos pontos essenciais para a resolução. Como exemplo, a definição dos lados do retângulo, sendo 110 m de comprimento e 220 m de largura. Em seguida, a dupla destaca a importância de calcular o número de fileiras e, em seguida, de plantas em cada fileira, chegando ao total de plantas. Repetindo o processo para cada espaçamento, de 25 cm, 30 cm, 35 cm e 40 cm. Esse trecho de exposição ressalta que a dupla chega à justificação, um processo central do RM, conforme apontado por Mata-Pereira e Ponte (2013).

Algumas reflexões sobre as ações do professor e os processos do RM que emergiram nas discussões

A compreensão dos dados revela que as acadêmicas mobilizaram diferentes processos do RM ao se dedicarem à resolução da atividade de Modelagem proposta. Essa atividade mostrou-se desafiadora, levando-as a buscar respostas corretas e ampliar suas ideias matemáticas. Conforme Schrenk e Vertuan (2022), a Modelagem Matemática oferece oportunidades para vivenciar situações reais que exigem a aplicação de conceitos matemáticos, ressignificando tanto os conceitos quanto a própria situação-problema.

Um dos aspectos emergidos nos dados apresentados é que as acadêmicas, ao debruçarem na resolução da atividade de Modelagem proposta, mobilizam diferentes processos do RM. Com isso pode-se inferir que a atividade proposta mostrou-se desafiadora e estimulou-as a buscar respostas corretas, o que por sua vez, se tornou uma oportunidade para ampliar e aprofundar suas ideias matemáticas. Assim, a atividade proposta neste estudo reflete a perspectiva de Schrenk e Vertuan (2022), pois proporcionou às acadêmicas a oportunidade de vivenciar uma questão real que exigiu a aplicação de conceitos matemáticos, ressignificando tanto os conceitos quanto a própria situação vivenciada.

O Quadro 5 a seguir sintetiza processos de RM mobilizados, detalhando os momentos de discussão em que foram identificados, e conteúdos matemáticos envolvidos.

Quadro 5: Processos de RM mobilizados e conteúdos matemáticos envolvidos

Processos do RM	Momentos da discussão	Conteúdo matemático envolvido
Conjecturas	- Argumentar que 1 alqueire pode ser apresentado por um retângulo de 120 m de largura por 200 m de comprimento. - Compreender que a área de 24.200 m² pode ser representado por um retângulo de lados 110 e 220 metros.	- Cálculo de área do terreno. - Reconhecer que figuras geométricas com diferentes medidas de comprimento e largura podem gerar mesma área.
Generalizar	- Compreender que a divisão do comprimento do terreno, 220 m, pelos 0,40 m que corresponde a distância entre cada planta, identificar quantas plantas possuem cada rua, sendo o mesmo cálculo para a largura, 110 m, dividido por 0,80 m que corresponde a distância entre as ruas. - Verificar o número de sacas de batatas produzidos.	- Quatro operações; Divisão com números decimais. - Transformação de unidades de medidas.

Justificar	- Compreender que dividindo a largura do terreno, pelo espaçamento entre as ruas, obtém o número de carreiras de plantas que podem ocupar o terreno. - Concluir que a distância em que ocorreu a maior produção foi a de 30 cm.	- Noção de área. - Quatro operações, transformação de unidades de medida e conhecimentos de geometria plana.

Fonte: Dos autores.

O quadro apresenta os achados em relação a três processos do RM que foram evidenciados durante as discussões para resolução da atividade:

Ao elaborar e testar conjecturas, as acadêmicas puderam argumentar e compreender diferentes representações e cálculos usados para o cálculo de áreas, em especial quando elas analisaram terrenos com diferentes medidas laterais, levando à generalização de que figuras geométricas com variadas dimensões podem resultar em mesma medida de área.

Neste processo de generalizar, identificamos que as futuras professoras aplicaram conceitos matemáticos como o cálculo envolvendo números decimais e a transformação de unidades de medida, exemplificado pela divisão do terreno para identificar o número de plantas e ruas com o intuito de validarem informações.

Por fim, procuraram justificar as conclusões obtidas, como a determinação do espaçamento que maximiza a produção, utilizando operações matemáticas e conceitos de geometria plana. Para isso, recorreram tanto à construção de representações visuais – como desenhos que ilustravam os cálculos e relações geométricas – que evidenciavam o desenvolvimento de um raciocínio progressivo e estruturado, com a integração entre aspectos visuais e conceituais.

O Quadro 6 apresenta as ações do professor que apoiam o RM, nomeadas conforme Araman, Serrazina e Ponte (2019), acompanhadas de trechos da discussão que exemplificam cada ação e suas contribuições para o avanço da resolução do problema pelas acadêmicas. Ressaltamos que, embora organizadas em uma determinada ordem, essas ações não possuem sequência obrigatória nem relação hierárquica, conforme indicado pelos autores.

Quadro 6: Ações do Professor que apoiam o RM

Ações do Professor	Momento da discussão e Contribuições
Guiar / Apoiar	Nos trechos em que o professor pergunta "Quantas ruas cabem?", "Multiplica pelo qual?" e "E como que vocês pensaram?", conduz o pensamento da estudante, encorajam a reelaboração de suas respostas e a reflexão sobre os passos do cálculo, pressionando-a a justificar suas escolhas e compreender melhor as medidas envolvidas no problema.

Informar / Sugerir	No trecho "Exato! Então você tem um caminho aí...", o professor valida as ideias da aluna, reforçando sua compreensão inicial. Isso possibilita que ela prossiga nos cálculos, fornecendo sugestões que ampliam sua compreensão sobre o processo.
Desafiar	A ação de Desafiar aparece quando o professor, ao ouvir uma formulação vaga sobre "produzir mais", exige maior precisão conceitual e questiona: "Então como que vai ter uma produção máxima dado uma melhor distância?". Essa intervenção pressiona a estudante a aprofundar a relação entre distância e produção, promovendo reflexão e pressiona para a precisão.

Fonte: Dos autores.

As ações do professor desempenharam um papel essencial no fomento à discussão matemática, proporcionando às acadêmicas Oportunidades de Aprendizagem Profissional relacionadas tanto a conhecimentos matemáticos quanto ao desenvolvimento do RM (Ribeiro; Ponte, 2020).

A análise realizada mostrou que as acadêmicas em formação progrediram na resolução da atividade, justificando e fundamentando as soluções matemáticas e alcançando uma resposta que soluciona o problema. Isso destacou a importância de proporcionar às futuras professoras o domínio dos conhecimentos matemáticos, além de desenvolver habilidades para promover o RM dos alunos.

O alcance desses processos revela a importância do papel das ações do professor no processo de aprendizagem e desenvolvimento profissional das acadêmicas. Ao conduzir a discussão a partir das ações de *Guiar/Apoiar, Informar/Sugerir* e *Desafiar* as estudantes em momentos específicos, o professor contribuiu para que elas avançassem em suas conjecturas, refinassem seus raciocínios e consolidassem os aspectos centrais do RM. Assim, as ações docentes observadas neste estudo reforçam a importância de preparar os professores para mediar atividades que desenvolvam o RM, destacando seu papel como facilitador do aprendizado e formador de práticas pedagógicas que contribuem para o desenvolvimento dos alunos. Ao assumir intencionalmente essas ações, o professor cria um ambiente propício para que as estudantes articulem seu pensamento, validem resultados e avancem em processos centrais do RM, como generalização e justificação.

Considerações finais

Neste estudo, objetivamos, por meio da análise de trechos de discussão, compreender os processos de RM mobilizados por uma dupla de acadêmicas, futuras professoras de Matemática, ao resolverem uma atividade de Modelagem Matemática. Foi possível observar que as acadêmicas, ao resolverem a atividade, mostraram aspectos essenciais da formação recebida, como o desenvolvimento de conjecturas, generalizações e justificativas, processos centrais do RM.

Observamos também que o curso de formação ofertado contribuiu para gerar oportunidades de aprendizagem profissional para as futuras professoras de matemática, auxiliando a atingir um dos principais propósitos do ensino de matemática: capacitar o professor a promover o RM dos alunos (Ribeiro; Ponte, 2020). Identificamos que a maneira como o curso foi elaborado e executado parece ter ajudado as futuras professoras a aprofundarem sua compreensão e desenvolverem o seu RM ao trabalharem com a atividade de Modelagem.

As interações vivenciadas pelas acadêmicas não apenas enriqueceram sua compreensão conceitual, mas também lhes permitiram experienciar atividades de Modelagem sob uma perspectiva dual: como estudantes que resolvem problemas e como futuras professoras que constroem conhecimentos fundamentais para sua prática docente, caminhando na contramão do ensino tradicional. Por meio dessa experiência, elas não apenas consolidaram seus saberes matemáticos, mas também desenvolveram habilidades e reflexões críticas que serão essenciais para sua atuação pedagógica, preparando-as para enfrentar os desafios do ensino da matemática com autonomia e criatividade.

Ao analisarmos a produção desse grupo em um primeiro encontro, percebemos que as estudantes conseguiram solucionar o problema proposto, utilizando conceitos matemáticos básicos, como o cálculo de área, transformação de unidades de medida, conceitos de geometria plana (como o cálculo de distâncias e proporções) e as quatro operações fundamentais. Esses conhecimentos permitiram que elas chegassem a uma solução viável para o problema apresentado. Entretanto, observamos que elas não progrediram nos cálculos para criar um modelo matemático mais avançado, que poderia envolver, por exemplo, a criação de uma função de duas variáveis para representar a relação entre a distância entre as plantas e a quantidade de batatas produzida por planta, fatores que determinam a produção total. Para uma próxima aplicação, seria interessante aprofundar os conceitos matemáticos explorados, introduzindo temas como inequações (para modelar restrições no problema), identificação do ponto de máximo (para otimizar a produção), cálculo do valor médio (para analisar resultados globais), derivada de função composta (para entender taxas de variação), função potência (para modelar relações não lineares) e resolução gráfica de problemas, conforme sugerido por Bassanezi (2002).

Nesse sentido, compreendemos que é fundamental discutir a importância de trazer embasamento sobre o RM para que as próprias acadêmicas possam reconhecer os processos do RM que mobilizaram e ter esse conhecimento para promover, em sala de aula, o RM com seus alunos. Isso mostra a relevância de pensar o design do processo formativo e a inclusão de atividades de Modelagem como perspectiva norteadora do processo. Essa temática do design formativo é tema da tese do primeiro autor em construção, que tem como objetivo contribuir para o aprofundamento de um modelo de design formativo centrado no RM.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e da Fundação Araucária, por meio de Bolsa Produtividade do segundo autor.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 17, n. 22, p. 1-16, set. 2004.

ANJOS, L. Q. **Contribuições de um processo formativo para professores dos anos iniciais visando a compreensão dos entendimentos essenciais de raciocínio matemático.** 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 466 490, 2019.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, n. 67, p. 441–461, 2020.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 14, n. 15, p. 1-18, n. 1 2001. Semestral. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10622>. Acesso em: 28 nov. 2025.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia (Alexandria)**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto (Portugal): Porto Editora, 1994.

BURAK, D. Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Orgs.). **Modelagem Matemática:** uma perspectiva para a Educação Básica. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010, cap. 1. p. 15-38.

DIAS, M. R. **Uma Experiência com Modelagem Matemática na Formação Continuada de Professores**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina.

ELLIS, A.; ÖZGÜR, Z.; REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 31, n. 2, p. 107-132, 2019.

FOGAÇA, M. E. B. C. *et al*. Modelagem matemática na perspectiva da educação matemática e sua relação com as Propostas Curriculares oficiais. **Revista Valore**, v.6, ed. Especial, Volta Redonda, 2021. Disponível em: <https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/view/828/579>. Acesso em: 28 nov. 2025.

KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Orgs.). **Modelagem Matemática**: uma perspectiva para a Educação Básica. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010, cap. 5. p. 97-114.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. Sobre os objetivos, objetos e problemas da pesquisa brasileira em Modelagem Matemática na Educação Matemática. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 467-488, jul./dez. 2012. Disponível em: <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa>. Acesso em: 28 nov. 2025.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning**: Pre-K-Grade 8. Reston, VA: NCTM, 2011.

LIMA, F. H.; ARAÚJO, J. L. Em direção a uma caracterização da intervenção docente: ações de um professor em uma prática de modelagem matemática. **REnCiMa**, v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021.

MALHEIROS, A. P. dos S.; FORNER, R.; SOUZA, L. B. Formação de professores em Modelagem e a escola: que caminhos perseguir?. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, [S. l.], v. 4, n. 1, p. 01–22, 2020. Disponível em: https://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/24566. Acesso em: 28 nov. 2025.

MARTENS, A. S. **Formação Continuada em Modelagem Matemática em Contexto De Pesquisa: Um estudo a partir dos professores participantes**. 2018. 132 f. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2018. Disponível em: <https://tede.unioeste.br/handle/tede/3925>. Acesso em: 28 nov. 2025.

MARTENS, A. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática e a Sala de Aula: um olhar a partir dos professores participantes de formação continuada. **Amazônia**: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, Belém/Pará/Brasil, v. 19, n. 43, p. 94-106, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/14684/10733. Acesso em: 28 nov. 2025.

MARTENS, A. S.; KLÜBER, T. E. O formador de professores em contextos de formação continuada em modelagem na educação matemática. **Debates em Educação**, v. 9, n. 3, p. 1-25, 2024b. Disponível em: https://doi.org/10.3895/actio.v9n3.18783. Acesso em: 28 nov. 2025.

MARTENS, A. S.; KLÜBER, T. E. A formação de professores em Modelagem Matemática segundo participantes de diferentes pesquisas. **Actio: Docência em Ciências**, [S. l.], v. 16, n. 38, p. e16027, 2024a. Disponível em: https://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/view/16027. Acesso em: 28 nov. 2025.

MARTENS, A. S.; TREVISAN, A. L. Ensino De Cálculo e Raciocínio Matemático e Seus Processos: O que se mostra dessa relação nas pesquisas dos Cnmem`s. **Vidya**, [S. l.], v. 43, n. 2, p. 39–57, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4582. Acesso em: 28 nov. 2025.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9.º ano. In: **Atas do encontro de investigação em educação matemática**, Póvoa do Varzim. p. 347-364, 2011.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. **Boletim GEPEM**, Seropédica, RJ, v. 62, p. 17-31, 2013.

MATA PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781 801, 2018.

MUTTI, G. S. L.; KLÜBER, T. E. Adoção da Modelagem Matemática para professores em um contexto de formação continuada. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (Rencima)**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 1-27, mar. 2021.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. **Educação e Matemática**, n. 100, p. 3-9, 2008.

OLIVEIRA, A. M. P. de. **Modelagem Matemática e as tensões nos discursos dos professores**. 2010. 199 p. Tese (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana. Salvador – BA. 2010.

OLIVEIRA, A. M. P.; BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e situações de tensão na prática pedagógica de professores. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 265-296, abr. 2011.

OLIVEIRA, H.; HENRIQUES, A. Preservice Mathematics Teachers' Knowledge about the Potential of Tasks to Promote Students' Mathematical Reasoning. **International Journal of Research in Education and Science**, v. 7, n. 4, p. 1300-1319, 2021.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná, Departamento de Educação Básica. **Diretrizes curriculares da educação básica**: matemática. Curitiba: SEED, 2008.

PIRES, E. M.; SILVEIRA, E. Obstáculos e resistências no uso de tendências metodológicas na educação matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 36, n. 72, p. 471-494, maio 2022. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a21

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa/PR, v. 7, n. 2, p. 355-377, 2012.

PONTE, J. P.; MATA PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 55 81, 2013.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, v. 156, p. 7-11, 2020.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. M. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 28, p. 1-20, 2020.

SCHRENK, M. J.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática como prática pedagógica: uma possível caracterização em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa (EMP),** São Paulo, v. 24, n. 1, p. 194-224, 2022.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 249-275, 2012.

TREVISAN, A. L.; VOLPATO, M. A. Discussões matemáticas em aulas de Cálculo Diferencial e Integral e as ações do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 15, n. 37, p. 1-21, 2022.

TREVISAN, A. L.; NEGRINI, M. V.; FALCHI, B. de.; ARAMAN, E. M. O. Ações do professor para promoção do raciocínio em aulas de Cálculo. **Educação e Pesquisa**, v. 49, p. 1-21, e251659, 2023.

VERONEZ, M. R. D.; RODRIGUES, P. H.; GALDIOLI, L. C. R.; KOWALEK, R. M. Desenvolvimento profissional do professor mobilizado pela Modelagem Matemática: uma narrativa em foco. **VIDYA**, Santa Maria (RS, Brasil), v. 43, n. 2, p. 327–351, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4631. Acesso em: 28 nov. 2025.

YACKEL, E.; HANNA, G. Reasoning and proof. In: KILPATRICK, J. *et al*. (Eds.), **A research companion to Principles and Standards for School Mathematics.** Reston,VA: NCTM, 2003. p. 227- 236.