



Edição Especial

X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
Universidade Estadual do Norte do Paraná - Cornélio Procópio (PR), 2024

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR: PRIMEIRAS EXPERIÊNCIAS DE UMA PROFESSORA E UM GRUPO DE ALUNOS

*MATHEMATICAL MODELING IN HIGHER EDUCATION: FIRST EXPERIENCES OF
A TEACHER AND A GROUP OF STUDENTS*

Gabriela Helena Geraldo Issa Mendes¹
Irinéa de Lourdes Batista²

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar, em síntese, uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida em um minicurso oferecido para alunos do 1º e 2º anos de Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Física e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. O texto apresenta uma breve abordagem teórica acerca da Modelagem Matemática como estratégia didática, bem como a descrição da atividade desenvolvida, seguida das considerações obtidas. A atividade relatada tinha como objetivo o estudo da função exponencial por meio de uma situação envolvendo o decaimento radioativo do Césio-137 a partir de um acidente ocorrido na cidade de Goiânia no ano de 1987. Tal atividade foi o primeiro contato dos participantes do minicurso com a Modelagem Matemática. O desenvolvimento da atividade se deu por meio das etapas de experimentação, abstração, resolução, validação e modificação. Por fim, são apresentadas reflexões a respeito da atividade desenvolvida, por meio da identificação de pontos positivos e aspectos desfavoráveis, e o entendimento dos estudantes a respeito da Modelagem Matemática após a abordagem.

Palavras chave: Função Exponencial; Decaimento Radioativo.

¹ Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM/UEL). Professora Adjunta A-CRES do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

² Doutora em Filosofia (FFLCH/USP). Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.



Abstract

This article aims to present, in summary, a Mathematical Modeling activity developed in a mini-course offered to students in the 1st and 2nd years of the Degree in Physics, Degree in Mathematics, Bachelor's Degree in Physics and Bachelor's Degree in Mathematics at the State University of Londrina. The text presents a brief theoretical approach to Mathematical Modeling as a teaching strategy, as well as a description of the activity developed, followed by the considerations obtained. The reported activity aims to study the exponential function through a situation involving the radioactive decay of Cesium-137 following an accident that occurred in the city of Goiânia in 1987. This activity was the first contact of the mini-course participants with Mathematical Modeling. The development of the activity took place through the stages of experimentation, abstraction, resolution, validation and modification. Finally, reflections on the activity developed are presented, through the identification of positive points and unfavorable aspects, and the students' understanding of Mathematical Modeling after the approach.

Keywords: Exponential Function; Radioactive Decay.

Introdução

Este artigo é uma versão aprimorada de um relato de experiência apresentado no X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM) e apresenta uma experiência vivenciada pela primeira autora, enquanto doutoranda no programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática, na Universidade Estadual de Londrina. A pesquisa desenvolvida durante o doutorado, buscava responder a seguinte questão norteadora: uma situação de ensino envolvendo a Modelagem Matemática e discussões epistemológicas, proporciona a estudantes graduandos de Física e Matemática, um entendimento a respeito da 2^a Lei de Newton, bem como a formulação de seu modelo científico?

Objetivando responder à questão norteadora, elaborou-se uma abordagem didática por meio da Modelagem Matemática, como estratégia didática no Ensino de Física. Para aplicação da abordagem didática proposta, foi ofertado um minicurso intitulado “Modelagem Matemática no Ensino de Física”, com carga horária de 20 horas. O minicurso ocorreu na Universidade Estadual de Londrina, e tinha como público alvo alunos do 1º e 2º anos de Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Física e Bacharelado em Matemática.

Este artigo tem como objetivo apresentar a primeira atividade de Modelagem Matemática realizada por esta autora, enquanto pesquisadora, e por este grupo de alunos em formação inicial. A atividade, proposta por Santos, Silva e Almeida (2007),

tinha como objetivo estudar a função exponencial por meio de uma situação envolvendo o decaimento radioativo do Césio-137.

De modo a apresentar o objetivo, o desenvolvimento da atividade bem como os referenciais teóricos que auxiliaram na elaboração e análise da atividade desenvolvida, o presente artigo foi organizado em: introdução, breve contextualização sobre Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, desenvolvimento da atividade e para encerrar, algumas reflexões.

Aporte teórico

Nas últimas décadas diversos estudos na área da Educação Matemática têm apresentado orientações e argumentos favoráveis à introdução da Modelagem Matemática nos currículos escolares. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 30), argumentam que:

[...] a abordagem de questões reais, oriundas do âmbito de interesses dos alunos, pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos bem como pode servir para mostrar aplicações da Matemática em outras áreas de conhecimento.

Blum e Ferri (2009), ao discutirem a importância da Modelagem Matemática no ensino, argumentam que a Modelagem Matemática pode:

- Ajudar os alunos a entender melhor o mundo;
- Apoiar a aprendizagem de Matemática (motivação, formação de conceitos, compreensão e retenção);
- Contribuir para desenvolver várias competências matemáticas e atitudes apropriadas,
- Contribuir para uma imagem adequada da Matemática (Blum; Ferri, 2009, p. 47, tradução nossa).

Pode-se destacar ainda que atividades de Modelagem Matemática propiciam o desenvolvimento do conhecimento crítico e reflexivo, estimulam a criatividade e aprendizagem colaborativa dos discentes.

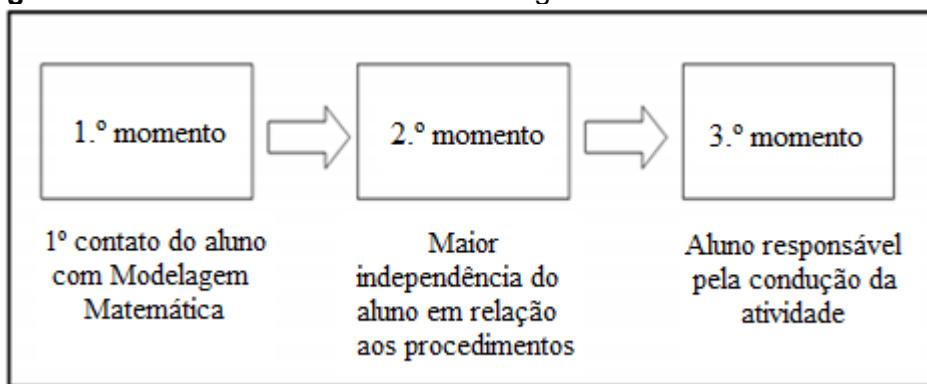
De modo específico, a Modelagem Matemática tem por objetivo construir uma solução para um problema não matemático por meio da Matemática (Bassanezi, 2004).

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15), uma atividade de Modelagem Matemática se inicia a partir de uma situação problemática e tem como característica a possibilidade de abordar assuntos do cotidiano, “caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema”. Segundo esses autores, uma atividade de Modelagem Matemática pode envolver as seguintes fases: interação, fase em que se obtém informações sobre a situação a ser estudada e formula-se um problema; matematização, fase em que se transformam as informações em linguagem matemática; resolução, fase na qual se constrói o modelo matemático; interpretação de resultados, fase em que os resultados matemáticos são associados à situação estudada; validação, fase em que acontece a articulação de conhecimentos de diferentes áreas (Almeida; Silva; Vertuan, 2012).

Almeida, Silva e Vertuan (2012), apresentam a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação problema. Para os autores, atividades de Modelagem Matemática com tais características, constituem-se em atividades investigativas em que o aluno modelador se envolve em ações cognitivas.

Almeida e Vertuan (2011, p. 27), ressaltam que o uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica requer a articulação entre “definição, investigação e resolução”, sendo que a familiarização do aluno com a Modelagem pode ser feita de forma gradativa, caracterizada em três diferentes “momentos”.

Figura 1: Diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula



Fonte: Almeida e Vertuan (2011, p.28)

A atividade apresentada neste texto é caracterizada como de 1º momento. Segundo os autores:

1º Momento - Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que as ações como definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor (Almeida; Vertuan, 2011, p. 27).

A atividade de 1º momento justifica-se pelo fato de ser o primeiro contato dos discentes participantes do minicurso ofertado com a Modelagem Matemática.

Decaimento Radioativo do Césio-137

Santos, Silva e Almeida (2007) apresentaram uma proposta para estudar a função exponencial. A situação apresentada refere-se a um acidente ocorrido com Césio-137 na cidade de Goiânia, capital de Goiás, no dia 13 de setembro de 1987.

De acordo com o Governo Estadual de Goiás e a Secretaria de Estado da Saúde, “o manuseio indevido de um aparelho de radioterapia abandonado, onde funcionava o Instituto Goiano de Radioterapia, gerou um acidente que envolveu direta e indiretamente centenas de pessoas” (Goiás, 2024).

Segundo a Comissão Nacional de Energia Nuclear,

O processo de redução da radioatividade, chamado decaimento radioativo, é um processo natural e não há como alterar seu ritmo. Isto ocorre porque o decaimento é um processo nuclear e a maioria dos processos físicos e químicos, usados para alterar as propriedades dos materiais, envolve somente as camadas eletrônicas dos átomos e não afeta as propriedades nucleares. Isto significa, por exemplo, que o Césio-137 é radioativo em qualquer condição física e sob qualquer forma de composto químico (CNEN, 2022, s.p.).

Tendo em vista que a meia-vida de um elemento radioativo consiste no tempo necessário para que a massa de material radioativo decaia pela metade, tem-se que o Césio-137 possui meia vida de cerca de 30 anos.

Segundo Santos, Silva e Almeida (2007, p. 13), durante a desmontagem do aparelho de radioterapia, foram expostos no ambiente 19,26g de Cloreto de Césio-137 (CsCl). Sendo assim, foi proposto “estudar como se comporta a concentração do Césio-137 na cidade de Goiânia no decorrer do tempo, procurando estimar uma

possível data para que esta contaminação do meio ambiente esteja minimizada" (Santos; Silva; Almeida, 2007, p. 14).

Os autores utilizaram o Excel e por meio de suas ferramentas apresentaram o modelo matemático: $f(n) = 19,26 \cdot e^{-0,6931 \cdot \left(\frac{t-1987}{30}\right)}$. Segundo este modelo, em 1997, 10 anos após o acidente, a quantidade de Césio em Goiânia seria de 15,28691254g.

Encaminhamentos metodológicos

Foi oferecido um minicurso intitulado "Modelagem Matemática no Ensino de Física", que dava direito a um certificado com carga horária de 20 horas, sendo elas 15 horas presenciais e 5 horas de leitura complementar. O minicurso ocorreu na Universidade Estadual de Londrina, sob a coordenação da orientadora Dra. Irinéa de Lourdes Batista e foi ministrado pela primeira autora deste trabalho.

Foram convidados alunos do 1º e 2º anos de Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Física e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, período noturno, do ano de 2017. Participaram 20 estudantes, em que 11 eram estudantes de Física, sendo nove de licenciatura e dois de bacharelado, e nove eram estudantes de Matemática, sendo sete de licenciatura e dois de bacharelado. Entre os participantes havia 13 homens e sete mulheres, e as idades variaram de 17 a 30 anos.

Durante o minicurso foram desenvolvidas seis atividades de Modelagem Matemática, sendo as três primeiras escolhidas, na literatura, para apresentar e familiarizar a Modelagem Matemática aos participantes e as três últimas foram adaptadas e elaboradas pela pesquisadora, tendo como foco principal o tema 2ª Lei de Newton. Em um questionário inicial, os participantes relataram que nunca participaram de uma atividade de Modelagem Matemática. Neste artigo, serão apresentados os dados referentes à segunda atividade do minicurso, a respeito do decaimento radioativo do césio-137.

Resultados e Discussão

A atividade utilizada foi apresentada por Santos, Silva e Almeida (2007, p. 13 - 15), e o texto foi apresentado aos participantes na íntegra, apenas a pergunta foi adaptada. A atividade, tinha por objetivo encontrar um modelo matemático para

descrever a quantidade de Césio presente em cada ano e fazer uma estimativa da quantidade de Césio 10 anos após o acidente.

Os 20 discentes foram divididos em cinco grupos. A seguir, são apresentadas as resoluções dos Grupos II, IV e V.

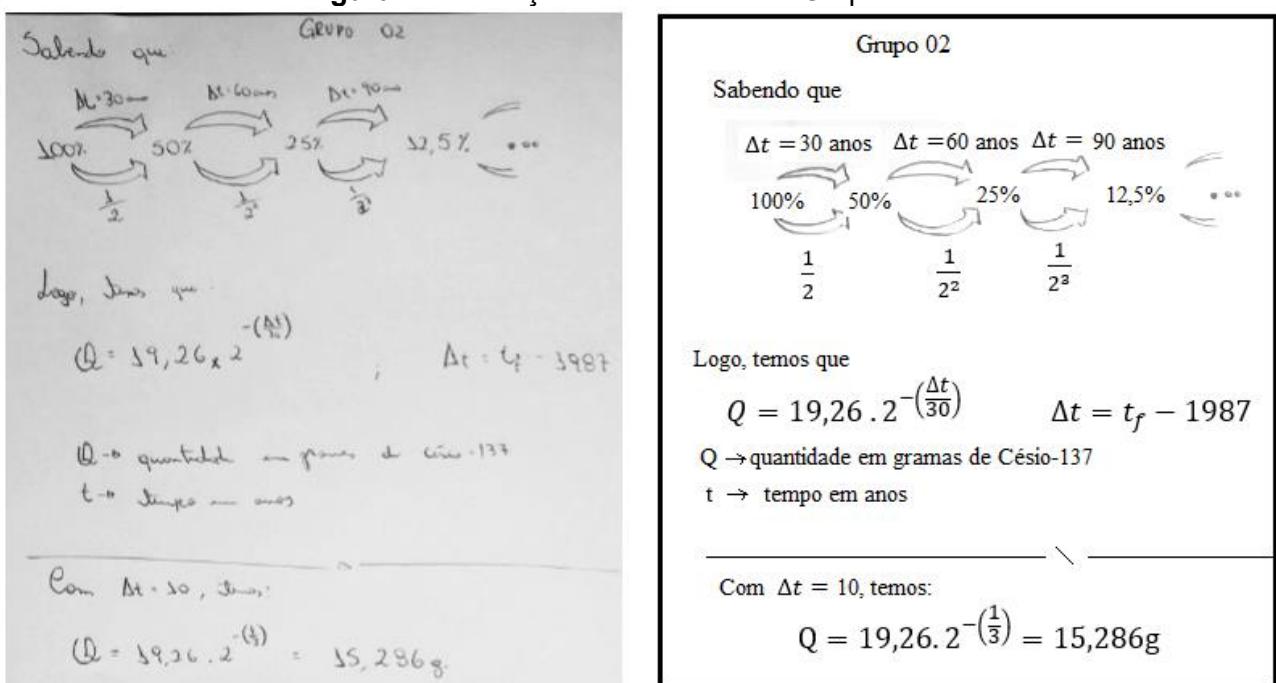
Grupo II - Formado por quatro alunos do 1º ano de Licenciatura em Física.

Os discentes observaram que a cada 30 anos a quantidade de césio cai pela metade, e utilizaram frações e porcentagens. Determinaram a variável tempo como sendo $\frac{\Delta t}{30}$, e após o processo de matematização, o grupo chegou ao seguinte modelo matemático:

$$Q = 19,26 \cdot 2^{-\left(\frac{\Delta t}{30}\right)}$$

Substituindo $\Delta t = 10$, o grupo encontrou que a concentração de césio era de 15,286g. Resposta correta de acordo com Santos, Silva e Almeida (2007). O grupo validou sua resposta comparando com os outros grupos. Após a argumentação da pesquisadora a respeito de usar as variáveis do enunciado, o grupo fez a seguinte substituição $\Delta t = t_f - 1987$.

Figura 2: Resolução da Atividade 2 – Grupo II



Fonte: Issa-Mendes (2018, p.144)

Grupo IV - Formado por quatro alunos(as) do 1º ano de Licenciatura em Matemática.

Os alunos observaram que a cada 30 anos a quantidade de césio diminui pela metade. No processo de construção do modelo, chamaram cada período de 30 anos de n , em que $n = 0$ correspondia ao ano do acidente, $n = 1$ correspondia ao ano de 2017 e assim sucessivamente. O grupo chegou ao seguinte modelo matemático:

$$Q = \frac{Q_0}{2^n} \text{ em que } Q_0 = 19,26g$$

Substituindo $n = 1/3$, ou seja, para encontrar a quantidade de césio 10 anos após o acidente, o grupo encontrou que a concentração de césio é de 15,28g.

Após a argumentação da pesquisadora a respeito do uso do tempo em anos, proposto na atividade, ao invés dos períodos, os(as) alunos(as) modificaram o modelo matemático, fazendo a seguinte substituição:

$$n = \frac{t - 1987}{30}, \text{ assim, } Q = \frac{Q_0}{2^{\frac{t-1987}{30}}}$$

Figura 3: Resolução da Atividade 2 – Grupo IV

GRUPO 4

Primeiramente, observa-se que a cada 30 anos a quantidade de Césio cai pela metade, porém devemos colocar o t em anos. Logo, cairá pela metade quando t for igual a 30. Disto segue que:

$$Q = \frac{Q_0}{2^{\frac{t-1987}{30}}} \text{ onde } Q_0 = 19,26$$

Considerando $t = 1997$, temos que:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{19,26}{2^{\frac{10}{30}}} = \frac{19,26}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{19,26}{\sqrt[3]{2}} = \\ &= \frac{19,26}{1,26} = 15,28g. \end{aligned}$$

Portanto no ano de 1997, a concentração de Césio será de 15,28g.

Fonte: Issa-Mendes (2018, p.145)

Grupo V – Formado por três estudantes do 1º ano de Licenciatura em Matemática e duas alunas do 1º ano de Bacharelado em Matemática.

O grupo iniciou elaborando uma tabela dividindo o valor da massa pela metade a cada 30 anos. Em seguida, elaboraram o modelo $19,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, em que x representa o período. Após a intervenção da pesquisadora e algumas discussões, substituíram x por $\frac{t-1987}{30}$ e apresentaram o seguinte modelo matemático:

$$19,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{t-1987}{30}\right)}$$

Figura 4: Digitação da Resolução da Atividade 2 – Grupo V

Grupo 5

$Q = 19,26\text{g de césio}$

| T(ano) | Q | Período |
|--------------------------------|------------|---------|
| 1987 | 19,26 | 0 |
| 1997 (10 anos após o acidente) | | |
| 2007 | | |
| 2017 | 9,63g | 1 |
| 2047 | 4,815g | 2 |
| 2077 | 2,4075 | 3 |
| 2107 | 1,20375 | 4 |
| 2137 | 0,601975 | |
| 2167 | 0,3009375 | |
| 2197 | 0,15046875 | |
| 2227 | 0,075... | |
| 2257 | 0,0376... | |
| 2287 | 0,018... | |
| 2317 | 0,009... | |
| 2347 | 0,004... | |
| 2377 | 0,0023... | |
| 2407 | 0,001... | |
| 2437 | 0,0005... | |

Chegamos na fórmula $19,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, pois é a quantidade em g dividido por 2 elevado ao período. Como não podemos elevar o período, e sim pelo ano:

$$19,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{t-1987}{30}\right)}$$

O ano inicial menos o ano que deseja saber a quantidade dividido por 30 que é o período de meia-vida.

Fonte: Issa-Mendes (2018, p.148-149)

Sobre os demais grupos, o grupo III, composto por dois alunos do 1º ano de Bacharelado em Física e dois estudantes do 2º ano de Licenciatura em Física resolveu de forma análoga ao Grupo IV, obtendo a resposta de 15,287g. Já o grupo I, formado por três estudantes de Licenciatura em Física, encontrou dificuldades no processo de matematização e na Modelagem Matemática como um todo, eles identificaram que a

quantidade de césio caia pela metade a cada 30 anos, registraram que esboçaram um gráfico e perceberam se tratar de uma exponencial (o gráfico não consta nos registros apresentados), mas não conseguiram elaborar um modelo matemático, não há sequer um esboço do processo de matematização.

Cabe, aqui, desenvolver uma análise mais profunda a respeito do Grupo I. Este grupo foi composto por três alunos que cursavam o 1º ano de Licenciatura em Física (F6, F7 e F11) e não conseguiu construir o modelo matemático da atividade. Os integrantes do grupo sabiam argumentar e apresentavam respostas verbais, porém, como eles mesmos disseram, não conseguiam escrever em linguagem matemática, ou seja, não conseguiam executar o processo de matematização a fim de construir um modelo matemático. Porém, mesmo com todas as dificuldades enfrentadas, os integrantes do grupo não desistiram e tentaram resolver todas as atividades.

Ao longo do desenvolvimento da pesquisa, percebeu-se a satisfação dos estudantes e a evolução dos mesmos no decorrer das atividades. Ao final do minicurso, foi entregue um questionário em que uma das questões oportunizava aos participantes relatarem suas experiências durante o minicurso, citando pontos positivos e aspectos desfavoráveis.

Entre os aspectos desfavoráveis, uma queixa recorrente foi não poder utilizar fórmulas, como se pode observar no trecho a seguir. “F2: Negativo: foi partir do começo e deixar o conhecimento de jeitos práticos e rápidos de resolução”.

Em relação aos pontos positivos citados pelos alunos, pode-se destacar, primeiramente, os que se referem ao fato de que maneiras diferentes de se resolver uma atividade conduziram aos mesmos resultados. “M3: Foi interessante ver que problemas ou uma questão pode ter vários meios de solução, além disso, sem precisar usar fórmulas decoradas”, “M8: Eu consegui perceber que posso encontrar várias maneiras para encontrar um resultado”. E por fim, os pontos positivos no que se referem à condução das atividades e do minicurso como um todo: “F6: Comunicação foi o que eu diria o mais importante, o que aconteceu entre a professora e os alunos. O diálogo e a troca de muitos pontos de vista diferentes”.

Foi perguntado ainda, o que os participantes entendiam por Modelagem Matemática, após o minicurso. Vale ressaltar que nenhum dos estudantes da pesquisa havia tido contato com a Modelagem Matemática antes do minicurso. Dentre as respostas destacam-se: “F4: Trazer um problema real para a linguagem matemática,

e assim resolvê-lo através da lógica”; “F9: Modelagem Matemática é a aplicação da matemática para resolver problemas da realidade, seja do dia a dia ou uma questão científica”; “M5: Tornar um problema real em uma linguagem matemática de forma a trabalhar com este modelo e chegar a conclusões aplicáveis à realidade”; “M6: Um meio diferenciado em resolver determinado problema no qual fatos do mundo real são abstraídos e simplificados, supondo as devidas considerações para uma prática e simples resolução”; “F7: Modelagem é um modo mais prático de se ver a matemática, onde se entende o porquê e como das fórmulas e equações”.

De acordo com as respostas, pode-se inferir, que a abordagem didática proposta proporcionou uma visão adequada da Modelagem Matemática.

Considerações finais

O trabalho com Modelagem Matemática configurou-se como um desafio, sobretudo em razão da experiência ainda limitada com essa abordagem. Embora a pesquisadora tivesse cursado, por um semestre, uma disciplina específica de Modelagem Matemática, não havia realizado de forma autônoma a condução de uma atividade de modelagem. Nesse contexto, o desenvolvimento do estudo demandou esforços adicionais para a compreensão, planejamento e implementação da proposta.

A atividade aqui relatada foi a primeira atividade de modelagem que a primeira autora realizou em uma disciplina de Modelagem Matemática durante o doutorado, e por esta razão foi cuidadosamente escolhida para ser a primeira atividade de modelagem dos participantes do minicurso ofertado.

Durante toda a atividade, houve intervenção da pesquisadora por meio de perguntas que pudessem fazê-los pensar nas possíveis formas de resolvê-la, e por vezes, a pesquisadora indicou caminhos a serem seguidos. De um modo geral, o desempenho dos grupos no que diz respeito às etapas da Modelagem Matemática foi satisfatório, e as dificuldades apresentadas não comprometeram os objetivos da abordagem.

A partir das respostas do questionário final, é possível inferir que a atividade de Modelagem Matemática abordada atingiu o objetivo proposto, sendo este, apresentar a Modelagem Matemática aos discentes e explorar conceitos de função exponencial.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas**. Londrina: Eduel, p. 19-43, 2011.
- ALMEIDA, L. M. W; SILVA, K. A. P; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação Básica**. Editora Contexto, 2012.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.
- BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Vol. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.
- BRASIL. Ministério da Ciência e Tecnologia; **Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN)**. Disponível em: <<https://www.gov.br/cnen/pt-br/acesso-a-informacao/perguntas-frequentes#11>> Acesso em: 15/08/2024.
- GOIÁS. Secretaria de Estado da Saúde. **Césio 137 Goiânia**. Disponível em: <<https://goias.gov.br/saude/cesio-137-goiania/>> Acesso em: 15/08/2024.
- ISSA-MENDES, G. H. G. 2018. **Modelagem Matemática e Construção Epistemológica de Modelos Científicos**: Uma Abordagem para o Ensino de Física. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2018.
- SANTOS, F. V.; SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. O Uso do Computador no Estudo de Funções no Ensino Médio. **Anais do IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**, Belo Horizonte, 2007.