Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino
REPPE

Edição Especial
X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
Universidade Estadual do Norte do Paraná – Cornélio Procópio (PR), 2024

INTEGRANDO GEOMETRIA ESPACIAL E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

INTEGRATING SPATIAL GEOMETRY AND DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS THROUGH MATHEMATICAL MODELING IN HIGHER EDUCATION

Gabriel Vasques Bonato[1]
José Ricardo dos Santos[2]
Milene Aparecida Malaquias Cardoso[3]

Resumo
Neste artigo, é relatada uma experiência de ensino com o uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para o desenvolvimento de conceitos de Geometria Espacial e noções introdutórias de Cálculo Diferencial e Integral. A proposta foi realizada com uma turma da 2ª série do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) e teve como foco promover uma aprendizagem significativa e articulada, por meio da resolução de uma situação-problema contextualizada. Os estudantes, organizados em grupos, construíram e analisaram protótipos de caixas, exercitando a aplicação prática de conceitos como volume, área e técnicas de otimização. A atividade permitiu não apenas a mobilização de saberes matemáticos, mas também favoreceu a colaboração, a comunicação e a reflexão crítica. Observou-se que, mesmo com pouca familiaridade com a metodologia, os estudantes demonstraram engajamento crescente, reforçando o potencial da Modelagem para aproximar a Matemática da realidade e incentivar a autonomia. A experiência evidenciou a eficácia dessa abordagem no ensino superior como estratégia formativa e investigativa.

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação de Professores; Modelagem Matemática; Cálculo Diferencial e Integral.

[1] Mestre. Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR).
[2] Mestre. Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR).
[3] Doutora. Autarquia Municipal de Educação (AME).

Abstract
This article reports a teaching experience using Mathematical Modeling as a pedagogical alternative for developing concepts of Spatial Geometry and introductory notions of Differential and Integral Calculus. The proposal was carried out with a class of the 2nd year of the Mathematics Degree course at the State University of Paraná (UNESPAR) and focused on promoting meaningful and articulated learning through the resolution of a contextualized problem situation. The students, organized into groups, built and analyzed prototypes of boxes, practicing the practical application of concepts such as volume, area and optimization techniques. The activity allowed not only the mobilization of mathematical knowledge, but also favored collaboration, communication and critical reflection. It was observed that, even with little familiarity with the methodology, the students demonstrated increasing engagement, reinforcing the potential of Modeling to bring Mathematics closer to reality and encourage autonomy. The experience demonstrated the effectiveness of this approach in higher education as a formative and investigative strategy.

Keywords: Mathematical Education; Teacher Training; Mathematical Modeling; Differential and integral calculus.

Introdução

Este artigo apresenta os resultados de uma experiência com atividade de Modelagem Matemática desenvolvida, em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II em um curso de licenciatura em Matemática, pelos primeiros autores. A proposta surgiu da necessidade de abordar conteúdos de Geometria Espacial e de Cálculo Diferencial e Integral com licenciandos em Matemática, promovendo uma aprendizagem mais ampla, articulada e significativa desses conhecimentos. Trata-se de uma versão ampliada e aprimorada do trabalho anteriormente submetido ao X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM), refletindo avanços tanto na fundamentação teórica quanto na descrição da prática pedagógica.

A esse respeito, Pavanello e Andrade (2002, p. 83) destacam que o ensino de Geometria nos cursos de Licenciatura "não pode se caracterizar como revisão de matéria, porque, de fato, não é uma questão de 'ver novamente', aquilo que já foi ensinado. Pelo contrário, muitos estudantes estarão aprendendo pela primeira vez." Além disso, ressaltam que a construção axiomática da Geometria, essencial à formação docente, "não pode acontecer desligada de um trabalho de construção de conceitos através de atividades, pois esta construção e a axiomática não são independentes".

Em consonância com essa perspectiva, Ferner, Soares e Mariani (2020) enfatizam a importância de se construir ambientes de aprendizagem que permitam aos estudantes se apropriarem dos conceitos geométricos, compreendendo-os em suas diversas dimensões: como visualização, construção e medida de figuras; como estudo do mundo físico; como ferramenta para representar outros conceitos matemáticos; e como exemplo de um sistema axiomático.

Neste contexto, Lopes e Pacheco (2023) apontam a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica eficaz de ensino e aprendizagem, pois oferece um ambiente que favorece a liberdade de expressão, o trabalho colaborativo, o uso da criatividade e o aprofundamento conceitual e procedimental em Matemática.

A atividade aqui relatada foi aplicada em uma turma do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). A proposta foi desenvolvida na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II ao longo de quatro aulas, distribuídas em dois encontros, com a participação de 19 estudantes no primeiro e 11 no segundo. Essa atividade, foi elaborada por dois professores da turma supracitada, sendo um responsável pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II e outro pela disciplina de Geometria Espacial.

A experiência foi inspirada no artigo “Modelagem Matemática na Otimização de um Protótipo de Embalagem: Relato de Experiência”, de Gomes e Silva (2017), apresentado no Encontro Paranaense de Educação Matemática de 2017, em Cascavel. Enquanto a proposta original foi voltada ao Ensino Médio, esta adaptação visa ao Ensino Superior, com foco na otimização de um protótipo de embalagem como forma de integrar conceitos geométricos e de cálculo.

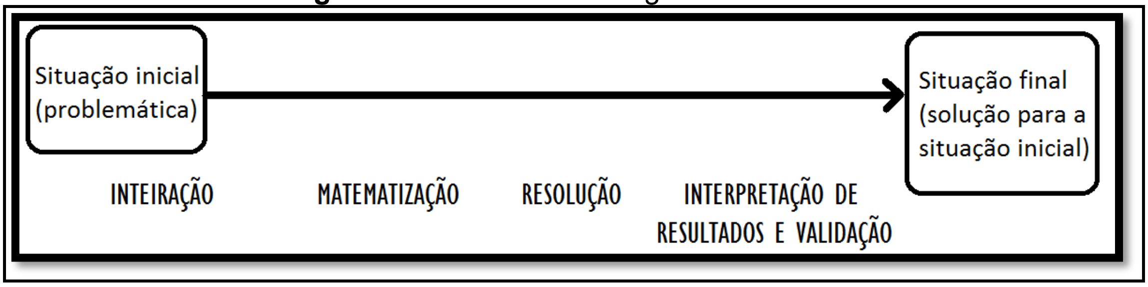
Modelagem Matemática no Ensino Superior

Segundo Almeida e Brito (2005) a Modelagem Matemática tem sido apontada por diversos educadores matemáticos como uma alternativa pedagógica que visa relacionar Matemática escolar com questões extra matemáticas de interesse dos estudantes, além de possibilitar a eles a participação ativa na construção de seu conhecimento uma vez que o tema investigado por meio da Modelagem pode ser escolhido pelos estudantes ou ser uma problemática apontada pela sociedade em que estão inseridos. Ao encontro disso, Lopes e Pacheco (2023), corroboram que a Modelagem Matemática tem sido utilizada em diferentes níveis de ensino e tem se mostrado uma ferramenta para o desenvolvimento e aprimoramento de habilidades, colabora para o entendimento dos papéis socioculturais da matemática (associada à outras áreas do conhecimento).

Lopes e Pacheco (2023), defendem a aplicação da Modelagem Matemática no Ensino Superior, por suas características que favorecem a ação reflexiva do educando ao proporcionar oportunidades de aplicações práticas do conteúdo estudado e o desenvolvimento de habilidades sociais e críticas.

Desse modo para o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática concordamos com a ideia de Almeida, Silva e Vertuan (2012) onde a atividade passa por cinco fases como destacado na Figura 1.

Figura 1: Fases de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12)

A partir de uma situação inicial — que pode se originar de diferentes contextos, sejam eles matemáticos, sociais, econômicos, ambientais, tecnológicos, entre outros — dá-se início a um processo investigativo característico da Modelagem Matemática. Esse processo inicia-se com a fase de interação com a situação-problema, momento em que os estudantes têm o primeiro contato com o fenômeno a ser estudado, levantando hipóteses, identificando variáveis relevantes e realizando a coleta de dados pertinentes. Em seguida, ocorre a matematização, etapa na qual os dados e relações observadas são organizados e representados por meio da linguagem matemática. A resolução envolve a formulação e o desenvolvimento de um modelo matemático que represente o problema e possibilite sua análise. Finalmente, a interpretação e validação dos resultados constituem a fase em que se busca responder à problemática inicial, avaliando a pertinência do modelo construído e sua capacidade explicativa ou preditiva.

De acordo com Barbosa (2001), a compreensão da Modelagem Matemática reside essencialmente no entendimento de seus processos constitutivos: a construção do modelo e a busca por respostas. Esses processos não são lineares, mas sim dinâmicos, envolvendo retomadas, ajustes e reelaborações. Um modelo matemático, conforme Bassanezi (1994, p. 31), apud Barbosa (2001), é “quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sob análise”. Isso indica que o modelo é uma simplificação da realidade, construída com base em conhecimentos matemáticos e heurísticos, e não uma representação exata ou definitiva do real.

Ampliando essa concepção, Almeida e Vertuan (2014, p. 2) definem o modelo como “[…] um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático”. A Modelagem, nesse sentido, promove a articulação entre diferentes saberes e exige do estudante o uso de habilidades cognitivas complexas, como análise, síntese, argumentação e tomada de decisão. Ela também favorece a construção de significados para os conceitos matemáticos, uma vez que esses emergem da necessidade de resolver problemas reais.

A construção de um modelo matemático representativo de uma situação e a posterior obtenção de uma solução demandam que os estudantes mobilizem conhecimentos previamente adquiridos, em processo de consolidação ou ainda não explorados. Nesse último caso, é papel do professor apresentar novos conteúdos matemáticos, conforme a necessidade identificada durante o desenvolvimento da atividade. Essa abordagem está alinhada com os princípios da aprendizagem significativa, conforme defendido por Ausubel (2003), na qual os novos conhecimentos são incorporados à estrutura cognitiva dos estudantes de maneira integrada e funcional.

Atividades de Modelagem Matemática podem ser desenvolvidas de diferentes formas, como descrevem Almeida e Dias (2004), que organizam essa prática em três momentos distintos. No primeiro momento, a situação-problema e os dados necessários são previamente definidos e fornecidos pelo professor, cabendo aos estudantes a resolução e a análise do problema dentro de limites mais controlados. No segundo momento, o professor apresenta a situação-problema, mas cabe aos estudantes a coleta das informações necessárias para solucioná-la, ampliando seu envolvimento e autonomia. No terceiro momento, estudantes e professor, em parceria, escolhem uma situação-problema de interesse comum, definem os objetivos da investigação, coletam dados, constroem e validam o modelo, até a comunicação dos resultados. Esse último estágio representa a forma mais autêntica e complexa da Modelagem, uma vez que requer maior independência dos estudantes e uma postura de mediação ativa do professor.

Muitas vezes, os estudantes não estão habituados a atividades que exigem autonomia, colaboração e protagonismo. Por isso, os momentos de familiarização, como propõem Almeida e Dias (2004), são fundamentais para garantir uma transição gradual do ensino tradicional para abordagens investigativas. Ao proporcionar vivências estruturadas, o professor contribui para a construção da confiança dos estudantes em suas próprias capacidades, promovendo uma aprendizagem mais ativa, crítica e engajada.

A Modelagem Matemática, assim compreendida, não é apenas uma técnica didática, mas uma abordagem epistemológica do ensino da Matemática, que visa resgatar o sentido dessa ciência na compreensão do mundo. Ela oferece aos estudantes oportunidades para desenvolver competências essenciais à formação cidadã e profissional, tais como pensamento crítico, resolução de problemas, argumentação lógica e capacidade de comunicação. Em um cenário educacional que demanda práticas inovadoras e contextualizadas, a Modelagem mostra-se uma alternativa promissora para transformar o ensino de Matemática em um processo mais significativo e integrado à realidade.

Com base nesse referencial, e considerando o momento de familiarização descrito por Almeida e Dias (2004), a próxima seção apresenta a descrição detalhada da produção dos dados, bem como a construção e a validação do modelo matemático desenvolvido na experiência relatada.

Resultados e Discussão

Para o desenvolvimento da atividade com os estudantes, optou-se por adotar uma proposta que se aproxima do primeiro momento de Modelagem Matemática, conforme caracterizado por Almeida e Dias (2004). Essa escolha foi orientada por um fator pedagógico fundamental: os estudantes envolvidos ainda não haviam cursado a disciplina específica de Modelagem Matemática no curso de Licenciatura, o que os colocava em uma posição de pouca familiaridade com essa metodologia de ensino. Considerando esse contexto, era importante oferecer uma experiência introdutória, com estrutura mais guiada e com mediação docente mais presente, permitindo aos estudantes uma aproximação gradual com os processos investigativos e com a linguagem da Modelagem Matemática.

Nesse primeiro contato, o objetivo principal da atividade foi proporcionar a construção de um conhecimento matemático mais amplo, consistente e articulado, especialmente no que diz respeito aos conceitos de volume de sólidos geométricos e às noções de otimização. A proposta visava integrar teoria e prática por meio da resolução de uma situação-problema concreta, incentivando os estudantes a utilizarem conhecimentos matemáticos de maneira contextualizada e significativa.

A dinâmica da atividade foi organizada em dois encontros presenciais. No primeiro encontro, participaram 19 estudantes, organizados em quatro grupos colaborativos: três grupos compostos por cinco estudantes cada e um grupo com quatro integrantes. A escolha pela divisão em pequenos grupos teve como finalidade estimular o trabalho coletivo, a troca de ideias e o desenvolvimento de habilidades sociais e cognitivas, como a escuta ativa, o diálogo argumentativo e a tomada de decisões em conjunto.

Já no segundo encontro, estiveram presentes 11 estudantes, os quais foram organizados em três grupos de três integrantes e uma dupla. Apesar da redução no número de participantes, a dinâmica de grupo foi mantida como princípio estruturante da proposta pedagógica, pois acredita-se que o trabalho em equipe favorece a aprendizagem colaborativa, como defendem autores como Lopes e Pacheco (2023), além de contribuir para o desenvolvimento de uma postura investigativa e crítica frente aos problemas apresentados.

A escolha por um problema contextualizado permitiu criar uma ponte entre o conhecimento matemático e a realidade dos estudantes, facilitando a compreensão dos conceitos e a percepção da Matemática como uma ciência viva, aplicável a situações do cotidiano e de relevância prática. Ainda que o problema tenha sido previamente definido e estruturado pelo professor, característica própria do primeiro momento de familiarização segundo Almeida e Dias (2004), procurou-se garantir espaços de exploração, análise e tomada de decisão por parte dos estudantes, respeitando o ritmo de aprendizagem e incentivando a autonomia progressiva.

Dessa forma, entende-se que essa primeira experiência com a Modelagem Matemática, ainda que orientada e com um problema previamente delimitado, representou um passo importante na construção de uma cultura investigativa no contexto da formação inicial de professores de Matemática. A seguir, será apresentada a situação inicial proposta aos estudantes e, posteriormente, a descrição detalhada das etapas de desenvolvimento da atividade.

A problematização inicial

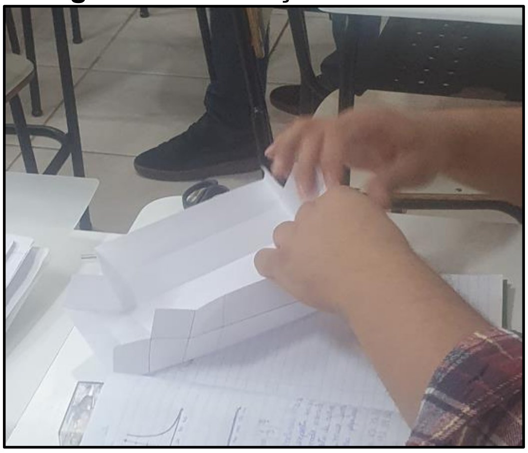
O desafio inicial proposto aos estudantes consistiu na construção de um protótipo de embalagem, uma caixa sem tampa, utilizando uma folha de sulfite A4 com dimensões aproximadas de 30 cm x 21 cm. Sendo assim, foi solicitado aos estudantes que projetassem uma caixa que comportasse o maior volume possível. Este exercício foi desenhado para explorar conceitos de Geometria Espacial, Funções Polinomiais, Pontos Críticos de uma função e desenvolver habilidades práticas de modelagem matemática, bem como motivar os estudantes em processo de otimização.

Como descrito anteriormente, foram necessários dois encontros de duas aulas de 50 minutos cada para a elaboração e validação de modelos matemáticos. Por isso, vamos relatar o desenvolvimento das aulas separando-as em duas partes. No primeiro encontro, os estudantes foram organizados em quatro grupos, e cada estudante recebeu uma folha de sulfite para criar o protótipo de uma caixa. Durante o início da atividade, observou-se que em alguns grupos, formados por estudantes que haviam participado anteriormente do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), começaram a construção dos modelos com mais rapidez, aplicando conhecimentos prévios adquiridos e rapidamente iniciaram a construção dos protótipos.

Por outro lado, um grupo teve maiores dificuldades iniciais ao explorar diversas abordagens para dobrar a folha de sulfite e construir a caixa. Este desafio foi uma oportunidade para introduzir uma discussão em sala de aula, na qual um dos autores, por meio de questionamentos, fora indagando qual seria a melhor forma de construção da caixa, com o intuito de auxiliar os estudantes que estavam com dificuldades iniciais.

Durante a construção, observou-se que um estudante fez várias marcações na folha de sulfite antes de cortá-la, como mostrado a seguir na Figura 2.

Figura 2: Construção de da caixa

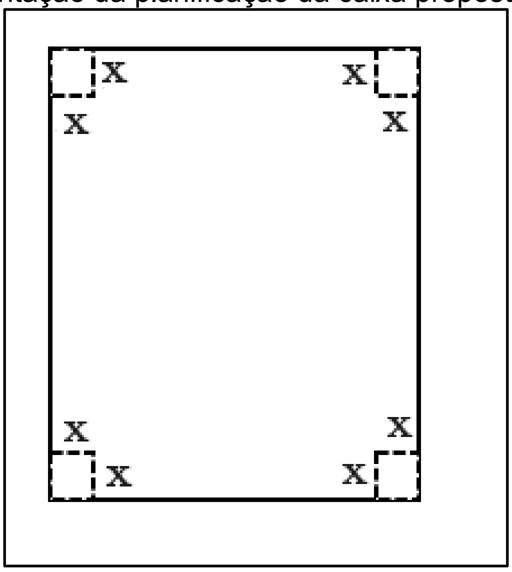


Fonte: Dos autores

Essa estratégia de um estudante, de fazer várias marcações na folha, antes de cortá-la, visava explorar diferentes possibilidades para a obtenção do maior volume para a caixa, e as marcações ajudaram a visualizar as relações geométricas envolvidas na construção do modelo.

Após a construção dos protótipos e a medição dos volumes, os autores da atividade propuseram uma análise mais aprofundada com os estudantes. A discussão focou na identificação das variáveis implícitas no modelo e no cálculo do volume da caixa. Alguns estudantes expressaram que a variável principal para a construção da caixa era sua altura, que estava diretamente relacionada com a medida dos cantos cortados da folha de sulfite. Sendo assim, um dos autores, seguindo as sugestões dos estudantes, construiu no quadro a seguinte representação, como mostra a Figura 3:

Figura 3: Representação da planificação da caixa proposta pelos estudantes



Fonte: Dos autores

Nesse momento de construção de um modelo matemático que representasse o volume da caixa, os autores notaram que a maioria dos estudantes estavam calculando o volume de suas caixas construídas. Por isso, os autores optaram em representar tais medidas no quadro, com o intuito de realizar uma discussão a respeito de quais caixas tinham maior volume e, com isso, incentivar a interação entre os grupos. Nos quadros a seguir, são apresentados os valores das medidas das alturas das caixas e seus respectivos volumes.

Foi possível observar que alguns estudantes realizaram as medidas da folha de sulfite usando a régua, enquanto outros se basearam nas medidas padrão de 30 cm x 21 cm fornecidas inicialmente. Essa diferença nas abordagens levou a algumas inconsistências nas medidas e, consequentemente, a diferenças nos volumes das caixas construídas. Essas questões foram observadas pelos estudantes mediante as discussões que foram surgindo a partir de suas medidas expressas no quadro. A partir disso, os estudantes que haviam realizado a medição com a régua, sugeriram que utilizassem as medidas fornecidas inicialmente pela proposta. Assim chegando a um consenso e, com isso, chegou-se aos quadros na Figura 4 apresentados anteriormente.

Figura 4: Representação das medidas determinadas por cada estudante.

Grupo A	h (cm)	Volume (cm³)
Aluno 1	5,2	1049,15
Aluno 2	1,0	532,00
Aluno 3	17,5	857,50
Aluno 4	4,0	1128,40
Aluno 5	4,25	1131,56

Grupo B	h (cm)	Volume (cm³)
Aluno 6	5,2	1049,15
Aluno 7	1,0	532,00
Aluno 8	17,5	857,50
Aluno 9	4,0	1128,40
Aluno 10	4,25	1131,56

Grupo C	h (cm)	Volume (cm³)
Aluno 11	5,2	1049,15
Aluno 12	1,0	532,00
Aluno 13	17,5	857,50
Aluno 14	4,0	1128,40

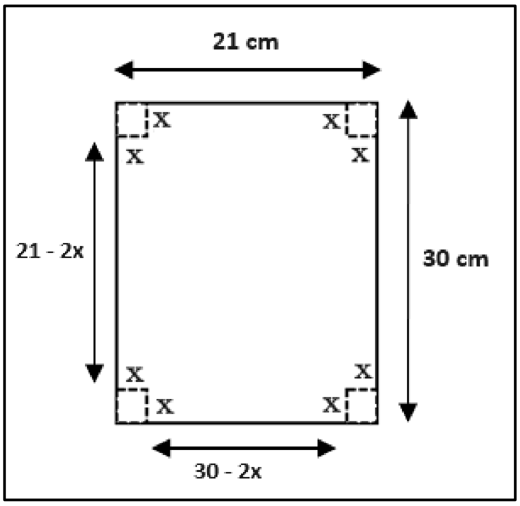
Grupo D	h (cm)	Volume (cm³)
Aluno 15	5,2	1049,15
Aluno 16	1,0	532,00
Aluno 17	17,5	857,50
Aluno 18	4,0	1128,40
Aluno 19	4,25	1131,56

Fonte: Dos autores

Depois de analisarem diferentes valores para alturas e volumes, os autores questionaram os estudantes a respeito de como encontraríamos o maior volume possível, em que, rapidamente, os estudantes responderam que precisávamos de uma fórmula. A partir disso, os estudantes foram desafiados a determinarem um modelo matemático para generalizar o volume em função da altura da caixa. Nesse momento, notamos uma disparidade de conhecimentos entre os estudantes, uma vez que, alguns não apresentaram dificuldades em determinar um modelo, já outros estavam se sentindo “perdidos”. A partir disso, os autores, reforçaram a importância da interação entre os membros dos grupos, isso porquê, foi observado que todos os grupos continham estudantes com boas ideias para a elaboração de modelos. Nesse momento, chegamos ao final do primeiro encontro.

O segundo encontro iniciou-se com a retomada da atividade e algumas explicações extras voltadas a estudantes que não estavam presentes no primeiro encontro. Novamente, os estudantes foram dispostos em grupos em que, não precisaria ser o mesmo grupo do encontro anterior. Sanadas as dificuldades iniciais de retomada, os estudantes retomaram a construção de um modelo que representasse o volume de suas caixas. Sendo assim, por meio de interações entre os membros dos grupos, os estudantes observaram que poderiam expressar uma lateral da caixa como $(30-2x)$, a outra lateral como $(21-2x)$ e a altura por x, conforme a Figura 5.

Figura 5: Representação da planificação da caixa proposta pelos estudantes com as dimensões



Fonte: Dos autores

Feito isso, eles realizaram a multiplicação para a obtenção do seguinte modelo:

$$v(x) = (30-2x)(21-2x)x$$

E feita algumas manipulações, obtiveram:

$$v(x) = 4x^3 - 102x^2 + 630x$$

Nessa etapa, os autores propuseram uma análise mais aprofundada com os estudantes. A discussão focou na identificação das variáveis implícitas no modelo e no cálculo do volume da caixa. Observou-se que a variável principal para a construção da caixa era a altura, que estava diretamente relacionada com a medida dos cantos cortados da folha de sulfite. Além disso, os estudantes foram questionados sobre o domínio da função. Essa análise ajudou a consolidar o entendimento dos conceitos matemáticos relacionados à otimização e à modelagem matemática.

A essa altura, praticamente todos os estudantes chegaram ao mesmo modelo, diferindo apenas nas letras utilizadas para representar o volume e lateral da caixa. Outro ponto é que, devido a interação advinda desta alternativa pedagógica, notamos que os estudantes estavam construindo os modelos sem muita diferença de período de tempo, o que facilitou o avanço das etapas de modelagem.

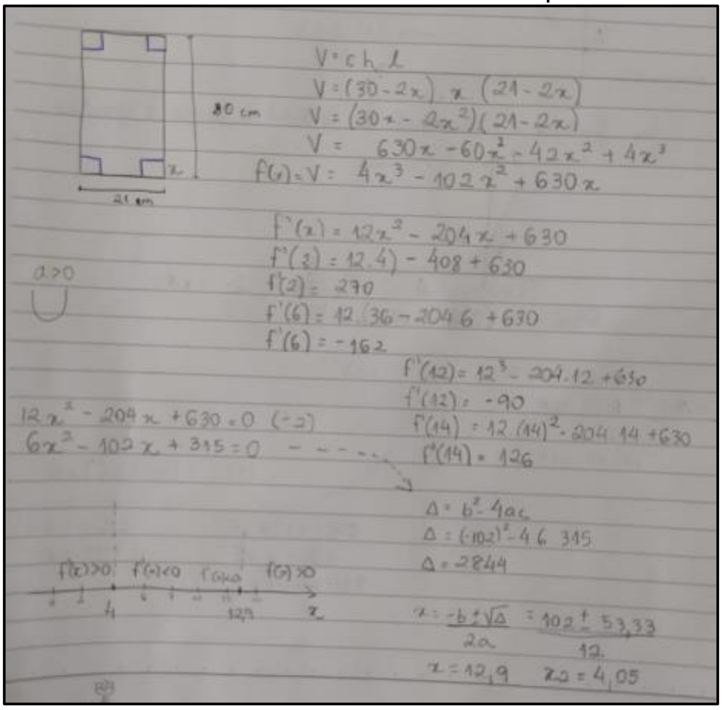
Como os estudantes já haviam estabelecido um modelo para representar a situação, os autores promoveram um debate orientado por meio de perguntas que buscavam aprofundar a compreensão da turma. Inicialmente, questionou-se: *“O que esse modelo representa?”* e *“Quais são as variáveis dependentes e independentes?”* Os estudantes, que já tinham estudado previamente noções introdutórias de derivadas e sua aplicação na análise de funções, responderam que o modelo expressava a relação entre o volume da caixa, o comprimento da lateral recortada e a altura formada. Em seguida, o grupo foi convidado a refletir sobre a finalidade do modelo por meio da questão: *“Qual pergunta queremos responder com esse modelo?”* A partir desse diálogo, concluíram que o objetivo era determinar o maior volume possível.

Na sequência, iniciou-se um debate coletivo sobre como o próprio modelo poderia ser utilizado para responder à pergunta. Nesse momento, foram retomados conceitos que os estudantes já conheciam — como variação, crescimento e decrescimento de funções — permitindo que eles identificassem a necessidade de analisar o comportamento do modelo matemático para localizar o valor que maximiza o volume. Esse processo dialógico conduziu a turma à compreensão de como utilizar o modelo de maneira fundamentada para resolver o problema proposto.

Nesse momento, notou-se dificuldades advindas dos estudantes a respeito dos conceitos necessários para determinar pontos críticos de uma função polinomial. Por isso, os autores sentiram a necessidade de realizar um pequeno debate a respeito do conteúdo de derivadas de funções de uma variável e sua relação com a reta tangente ao ponto.

Após o debate a respeito de pontos críticos, os estudantes expressaram que, deveriam derivar a função volume e igualá-la a zero, uma vez que o local em que a reta tangente tem inclinação igual a zero, será um ponto crítico e consequentemente um candidato a ponto de máximo local. Na Figura 6 é possível observar o desenvolvimento do modelo por um estudante:

Figura 6: Desenvolvimento da atividade feito por um estudante

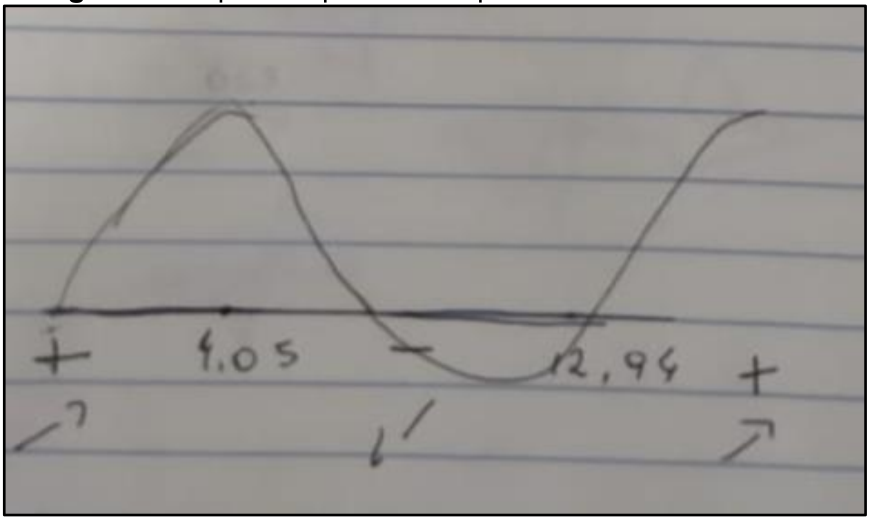


Fonte: Dos autores

Podemos observar na Figura 6 que o estudante, chegou em dois valores para a variável independente que eram candidatos a ponto crítico do modelo. Nesse momento, retomamos a discussão a respeito do domínio da função em que, os estudantes rapidamente disseram que o valor $x_2 = 12{,}9$ cm não poderia ser usado, pois estava fora do domínio da função. Além disso, uma estudante questionou: se x for 12 cm, então a lateral menor da folha deveria ter 24 cm e tem apenas 21 cm. Após as discussões, chegou-se a um consenso de que o valor $x = 4{,}05$ cm representaria a altura que resultaria no maior volume da caixa.

Por outro lado, outro estudante questionou: mas o que garante que esse valor representa um ponto de máximo local, uma vez que sabemos que a reta tangente a esse ponto é zero, isso não pode significar que é um ponto de mínimo local? A partir desse questionamento, foi feita uma sugestão de debate com a turma toda, em busca de respostas para a questão levantada. Até que um estudante disse: vimos que conseguimos encontrar a inclinação da reta tangente em qualquer ponto da função, com isso podemos observar os períodos em que a função é crescente ou decrescente e assim, determinar se o valor que encontramos é de máximo ou mínimo local. Os autores questionaram, você pode explicar um pouco melhor? E o estudante pediu um tempo e apresentou o seguinte esquema (Figura 7):

Figura 7: Esquema apresentado por um estudante da turma



Fonte: Dos autores

Foi sugerido que este estudante explicasse seu esquema para a turma toda, porém notou-se uma dificuldade de compreensão por parte dos estudantes. Com isso, os autores aproveitaram o momento para formalizar conceitos relacionados a taxa de variação instantânea de funções. Assim como apresentado a seguir (Figura 8):

Figura 8: Parte da formalização do conteúdo

Derivada e Crescimento/Decrescimento de uma Função

- Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então $f(x)$ é ***crescente*** nesse intervalo.
- Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então $f(x)$ é ***decrescente*** nesse intervalo.
- Se $f'(x) = 0$ em um intervalo, então $f(x)$ é ***constante*** nesse intervalo.

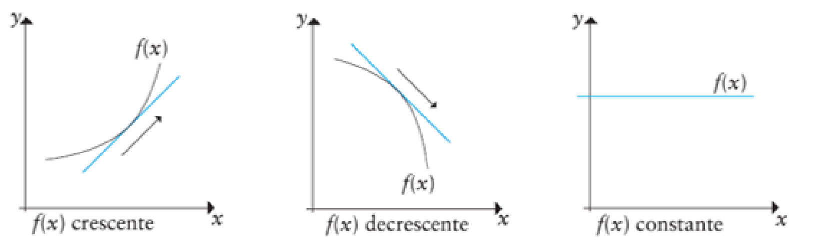


Figura 8.5a $f'(x) > 0$. Figura 8.5b $f'(x) < 0$. Figura 8.5c $f'(x) = 0$.

Fonte: Morolo (2012)

Além disso, formalizamos, também o conceito de máximos e mínimos locais de funções e o teste da primeira derivada. Por fim, retomamos a atividade e sugerimos que os estudantes validassem o modelo adquirido, em que a maioria realizou o cálculo substituindo o x determinado na função volume. Da seguinte maneira:

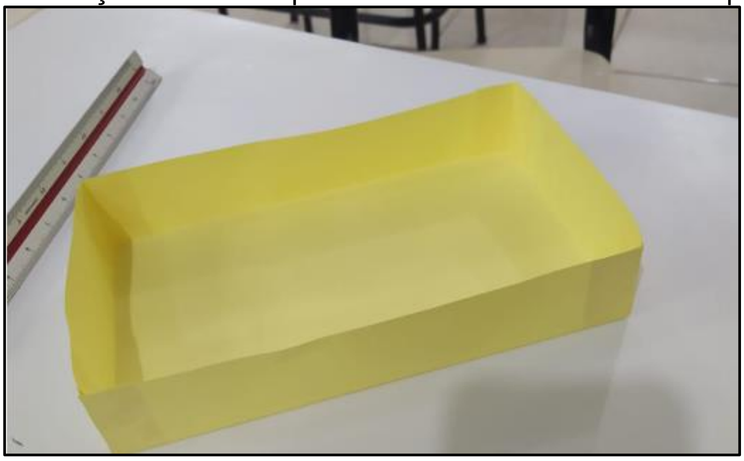
$$v(x) = 4x^3 - 102x^2 + 630x$$

$$\Rightarrow v(4{,}05) = 4(4{,}05)^3 - 102(4{,}05)^2 + 630(4{,}05)$$

$$\Rightarrow v(4{,}05) = 1144{,}16$$

Assim, eles concluíram que o volume máximo para a caixa feita de folha de sulfite seria de 1144,16 cm³. Já nos momentos finais da aula, realizamos uma breve discussão a respeito da capacidade dos sólidos geométricos e o quanto de água caberia em suas caixas. Por fim, foi solicitado aos estudantes que reconstruíssem suas caixas com a medida que encontramos (Figura 9).

Figura 9: Construção da caixa a partir das medidas determinadas pelo modelo



Fonte: Dos autores

Foi possível observar que essa proposta de atividade foi desenvolvida a partir das cinco fases defendida por Almeida, Silva e Vertuan (2012), a partir da situação inicial proposta (construção de um protótipo de embalagem) utilizando a folha de sulfite, em que os estudantes colocados em grupos discutiram, investigaram maneiras de como resolver a atividade proposta (fase de inteiração), seguindo para o processo de tratamento matemático (matematização), em um momento de discussão com toda a turma é discutido as possíveis soluções encontrada por cada um dos grupos seguida da resolução e a formulação de um modelo matemático que represente a situação e por fim a interpretação dos resultados e validação visam aplicar o modelo matemático construído pelos estudantes e consistem em responder a pergunta formulada (Qual o maior volume possível a partir da construção de uma caixa feita com uma folha de sulfite?), avaliando o modelo construído e suas interpretações.

Algumas considerações

As reflexões apresentadas neste relato evidenciam que a Modelagem Matemática se configura como uma alternativa pedagógica eficaz para o ensino de conceitos de Geometria Espacial, especialmente quando aplicada em contextos que promovem a articulação entre teoria e prática. A atividade desenvolvida permitiu aos estudantes não apenas aplicar conhecimentos matemáticos em situações contextualizadas[4], mas também refletir criticamente sobre as variáveis envolvidas no problema proposto, mobilizando técnicas de otimização e raciocínio geométrico de forma integrada.

Ao construir e analisar os protótipos de embalagem, os licenciandos puderam estabelecer conexões entre a Geometria e situações do cotidiano, compreendendo a Matemática como um instrumento útil para a resolução de problemas reais. Essa abordagem contribuiu para ressignificar o ensino da Geometria, em consonância com as proposições de Pavanello e Andrade (2002), que defendem uma prática pedagógica pautada na construção ativa de conceitos, e não na mera revisão de conteúdos.

Além do aspecto conceitual, a proposta revelou-se potente do ponto de vista didático-pedagógico ao favorecer a aprendizagem colaborativa e a participação ativa dos estudantes. A dinâmica da atividade permitiu um ambiente de troca e cooperação, no qual os discentes superaram, ao longo da aula, barreiras iniciais de comunicação e engajamento, passando a interagir de maneira espontânea e produtiva. Como destacam Lopes e Pacheco (2023), a Modelagem Matemática contribui para a criação de espaços de aprendizagem em que os estudantes têm maior liberdade para expressar suas ideias, utilizar sua criatividade e construir conhecimento de forma conjunta.

Nesse sentido, a atividade desenvolvida demonstrou grande potencial para fomentar tanto a apropriação dos conteúdos matemáticos — em especial, os

[4] Entendemos por situações contextualizadas aquelas em que os conceitos matemáticos são explorados por meio de problemas reais ou próximos da vivência dos estudantes, permitindo que atribuam sentido ao conteúdo e compreendam sua aplicação prática.

relacionados à Geometria Espacial e ao Cálculo Diferencial e Integral — quanto o desenvolvimento de competências socioemocionais e cognitivas, como o trabalho em equipe, a argumentação e a reflexão crítica. A experiência reforça, portanto, a importância de propostas pedagógicas que integrem diferentes saberes, promova o protagonismo estudantil e contribuam para a formação de professores capazes de articular teoria, prática e contextos reais no ensino de Matemática.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. **Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os estudantes podem lhe atribuir?** Ciência & Educação, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R.. **Um estudo sobre o uso da modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.** In: BOLEMA, Rio Claro – SP, 2004.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, L. M. W.; PESSÔA, K. A. (Org.). **Modelagem Matemática em foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014, p. 1-19.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: Contribuições para o debate teórico. In: **Reunião anual da ANPED**: Caxambu- RJ. Anais... Rio Janeiro: Caxambu, 2001.

FERNER, D. L., SOARES, M. A. S., & MARIANI, R. de C. P. (2020). Geometria nas licenciaturas em Matemática: um panorama a partir de Projetos Pedagógicos de Cursos. **Ensino Em Re-Vista**, *27*(2), 434–457. https://doi.org/10.14393/ER-v27n2a2020-2

GOMES, J. C. S. P.; SILVA, K. P.; **Modelagem matemática na otimização de um protótipo de embalagem: relato de experiência.** In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2017, Cascavel. **Anais**... Cascavel: SBEM-PR, 2017.

LOPES, A.; PACHECO, J. V. P.. Panorama das pesquisas brasileiras em modelagem matemática no ensino superior pela perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.16, n.2, p.181-212, novembro 2023.

MOROLO, A. C. Aplicações das Derivadas no estudo das Funções. In: MOROLO, A. C. **Matemática aplicada a administração, economia e contabilidade**. 2 ed. São Paulo: Cengage, 2012. p. 227-253.

PAVANELLO, R. M.; ANDRADE, R. Nozaki G. Formar professores para ensinar Geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática. Educação Matemática em Revista. São Paulo, a. 9, n. 11, edição especial, 2002.