Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino
REPPE

Edição Especial
III Congresso Internacional de Ensino - CONIEN
Universidade do Minho - Braga, Portugal, 2024

UM ESTUDO DE ENVOLTÓRIAS: INVESTIGANDO O LUGAR GEOMÉTRICO DOS PONTOS CARACTERÍSTICOS DE UMA FAMÍLIA DE CURVAS COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA

A STUDY OF ENCLOSURES: INVESTIGATING THE GEOMETRIC LOCATION OF THE CHARACTERISTICAL POINTS OF A FAMILY OF CURVES WITH THE GEOGEBRA SOFTWARE

Ana Carla Pimentel Paiva[1]
Francisco Régis Vieira Alves[2]
Helena Maria De Barros Campos[3]
Georgyana Gomes Cidrão[4]

Resumo

Este estudo investiga o Algoritmo das Envoltórias, uma técnica fundamental na análise de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias - EDOs. Utilizando-se do *software* GeoGebra, para explorar as famílias de curvas através da representação de seus lugares geométricos. As EDOs são essenciais na modelagem de uma ampla gama de fenômenos naturais e artificiais, e compreensão de suas soluções e propriedades sendo empregue em vários campos científicos. Empregando a Engenharia Didática - ED, como metodologia de pesquisa, este estudo propôs a analisar e discutir o nosso objeto matemático, de modo a auxiliar na construção das simulações no software GeoGebra. Assim, combinando o estudo das envoltórias com a abordagem da Engenharia Didática, este trabalho busca fornecer insights que auxiliem na compreensão das soluções das EDOs. Desta forma, além de discutir o Algoritmo das Envoltórias, buscamos demonstrar como o GeoGebra pode ser empregado como uma ferramenta eficaz para visualização e análise de soluções de EDOs. Inferindo assim que a abordagem visual facilitada pelo GeoGebra permite uma

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza-Brasil.
[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza-Brasil.
[3] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro-UTAD-Vila Real, Portugal.
[4] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza-Brasil.

compreensão intuitiva, enriquecendo o processo de transmissão do saber matemático.

Palavras chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Algoritmo das Envoltórias; Engenharia Didática; GeoGebra.

Abstract
This study investigates the Envelope Algorithm, a fundamental technique in the analysis of dynamic systems described by ordinary differential equations - ODEs. Using GeoGebra software, to explore families of curves through the representation of their geometric places. ODEs are essential in modeling a wide range of natural and artificial phenomena and understanding their solutions and properties and being employed in various scientific fields. Using Didactic Engineering - ED, as a research methodology, this study proposed to analyze and discuss our mathematical object, in order to assist in the construction of simulations in the GeoGebra software. Thus, combining the study of envelopes with the Didactic Engineering approach, this work seeks to provide insights that help in understanding ODE solutions. Therefore, in addition to discussing the Envelope Algorithm, we seek to demonstrate how GeoGebra can be used as an effective tool for visualizing and analyzing ODE solutions. Thus inferring that the visual approach facilitated by GeoGebra allows an intuitive understanding, enriching the process of transmitting mathematical knowledge.

Keywords: Ordinary Differential Equations; Envelope Algorithm; Didactic Engineering, GeoGebra.

Introdução

Este estudo investiga o lugar geométrico descrito pelas envoltórias, uma ferramenta fundamental no entendimento das soluções de equações diferenciais ordinárias - EDO’s.

As EDO’s são fundamentais na descrição e compreensão de sistemas dinâmicos em diversas áreas, desde física, engenharia, biologia até a economia. O algoritmo das envoltórias trata-se de uma técnica poderosa que permite visualizar e compreender o comportamento qualitativo das soluções de EDO’s (Boyce e Diprima, 2020).

Na física, as EDO’s são empregues para descrever o movimento de corpos e sistemas mecânicos, como pêndulos, sistemas massa-mola e osciladores. Por exemplo, as leis do movimento de Newton podem ser expressas por meio de equações diferenciais que relacionam força, massa e aceleração.

O conteúdo matemático equação diferencial ordinária é constituído essencialmente por uma equação que envolve as derivadas de uma função desconhecida de uma variável.

Por exemplo, seja y uma função de x e que y', y'', ..., y^n sejam as suas derivadas. Uma equação com $F(y', y'', ..., y^n) = 0$ denota uma EDO de ordem n, em que a ordem corresponde a ordem da derivada de maior grau que aparece na equação, no caso a derivada y^n (De Figueiredo e Neves, 1979).

Em relação a resolução de uma EDO, o mecanismo envolve encontrar uma função que satisfaça a equação diferencial dada, sujeita a algumas condições iniciais ou de contorno (De Figueiredo e Neves, 1979).

Assim, neste trabalho, começamos com o detalhamento da metodologia de pesquisa a Engenharia - ED que estruturou a investigação acerca do nosso objeto matemático. A escolha pela ED como metodologia ocorreu devido a sua abordagem sistemática e estruturada, as suas quatro fases *dialéticas*, para investigar e desenvolver práticas de ensino em matemática.

A ED enfatiza a criação de situações de ensino que promovam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, permitindo aos alunos participem ativamente da construção do seu conhecimento por meio de atividades desenvolvidas. Essa abordagem orienta o planejamento dessas atividades, a implementação e a avaliação de intervenções, visando melhorar a eficácia do ensino e promover o engajamento dos alunos.

Posteriormente, prosseguimos o nosso estudo explorando tanto o conceito de envoltórias como o algoritmo das envoltórias de modo a ser implementado no software GeoGebra.

Portanto, o estudo das envoltórias ocorreu de modo a fornecer uma perspectiva para entendimento do comportamento das soluções das EDO’s ao longo do tempo ou de outro parâmetro relevante. Dessa forma, se espera por meio desse estudo que as envoltórias auxiliem a “visualizar” como as diferentes soluções se relacionam entre si e forneçam *insights* sobre o comportamento global do sistema modelado pela EDO.

Aporte teórico

A metodologia de pesquisa Engenharia Didática (ED), se originou na França, nos fins dos anos 80, como uma forma de operacionalizar os ideais e pressupostos de investigação da Didática da Matemática - DM.

A Didática da Matemática pode ser definida como uma grande área do conhecimento dedicada à análise e ao aprimoramento dos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

O foco dessa grande área do conhecimento se encontra na compreensão de como os conceitos matemáticos são ensinados e assimilados pelos alunos, bem como no desenvolvimento de estratégias eficazes para facilitar esse processo. Assim, DM busca investigar questões como métodos de ensino, materiais didáticos, interação professor-aluno, resolução de problemas, entre outros aspectos relevantes para a prática educacional em matemática.

Enquanto a DM se concentra na análise e no aprimoramento dos processos de ensino e aprendizagem da matemática em geral, a ED se trata de uma abordagem específica dentro desse campo que busca compreender como os conceitos matemáticos são construídos pelos alunos e os professores.

Alves, Dias e De Lima (2018) conceituam a Engenharia Didática (ED) como uma metodologia de pesquisa que se destaca por ser um esquema experimental fundamentado em um conjunto de experimentações e práticas didáticas realizadas em sala de aula.

Artigue (1996) propõe que a abordagem da ED compreenda quatro etapas clássicas: concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. No entanto, do ponto de vista da ação experimental e da temporalidade investigativa, Artigue (1966) dispõe que essas fases foram estruturadas em fases dialéticas: fase de análises preliminares; fase de concepção e análise a priori das situações didáticas; experimentação e, por fim, análise a posteriori e validação (interna e externa) de todo aparato teórico construído tendo como fim a obtenção de conhecimentos científicos sobre o ensino de um assunto.

Na fase inicial delineada pela Engenharia Didática (ED), conhecida como análises preliminares, é crucial que o professor compreenda tanto a estrutura atual do ensino e seus impactos quanto as limitações do software para seu uso pedagógico. A partir disso, ele pode identificar as principais dimensões que devem ser consideradas no estudo do problema e como essas dimensões se relacionam com o sistema de ensino (Almouloud, 2007).

De maneira mais concisa, Alves (2018) divide essas dimensões em três categorias principais: epistemológica, cognitiva e didática. A dimensão epistemológica engloba as características do conteúdo a ser abordado, desde sua evolução histórica até sua fundamentação matemática. Enquanto isso, a dimensão cognitiva explora as características cognitivas dos alunos, incluindo as dificuldades que podem enfrentar e os obstáculos epistemológicos que podem surgir. Essa análise busca antecipar as possíveis concepções dos alunos em relação ao conteúdo trabalhado em sala de aula. Por fim, a dimensão didática investiga as características relacionadas ao funcionamento do sistema de ensino, buscando entender como o conteúdo será apresentado e assimilado pelos alunos dentro desse contexto (Alves, 2018).

Na segunda fase da Engenharia Didática (ED), denominada análises a priori, o pesquisador é incumbido de desenvolver e examinar uma série de situações didáticas. O objetivo é facilitar a superação dos obstáculos epistemológicos que os alunos possam enfrentar em relação ao assunto estudado. Essa abordagem visa não apenas aprimorar o entendimento dos alunos, mas também validar as hipóteses de pesquisa elaboradas na fase anterior (Almouloud, 2007).

A terceira fases dialética, a experimentação, consiste na implementação prática das situações didáticas planejadas durante a análise a priori. É o momento em que os resultados teóricos são colocados em prática, permitindo a obtenção de resultados empíricos que complementam a análise teórica (Almouloud, 2007). Durante essa fase, todo o dispositivo planejado é aplicado na sala de aula, proporcionando uma oportunidade para verificar a eficácia das estratégias pedagógicas propostas.

Na última etapa, a Análise *a Posteriori* e Validação, ocorre uma investigação detalhada sobre a produção dos alunos, observando seu comportamento durante o desenvolvimento da sequência didática e utilizando os dados coletados ao longo da experimentação (Artigue,1996). Essa fase baseia-se na análise dos resultados obtidos na sala de aula, confrontando as previsões feitas durante a análise a priori com os dados observados após a implementação das atividades.

O uso de critérios sistemáticos e os pressupostos da ED são fundamentais para permitir esse confronto entre os dados previstos e os dados observados. Essa abordagem proporciona uma oportunidade de refinamento contínuo das práticas de ensino, permitindo que os educadores ajustem suas estratégias pedagógicas com base em evidências empíricas.

No entanto, neste texto, nos concentramos apenas nas duas primeiras fases iniciais da ED, especificamente nas análises a preliminares e *a priori*, uma vez que as atividades ainda não foram aplicadas. Essa fase de planejamento é essencial para garantir que as situações didáticas sejam cuidadosamente elaboradas e alinhadas aos objetivos de ensino.

Uma Análise do Algoritmo para determinar a equação da envoltória

As soluções das EDO's podem ser agrupadas em diferentes tipos, dependendo das características da equação e das condições iniciais ou de contorno fornecidas.

Podemos discutir os principais tipos de soluções ou famílias de soluções das EDO's do seguinte modo: a solução particular que se refere a uma única solução específica que satisfaz a equação diferencial junto com as condições iniciais ou de contorno específicas fornecidas; uma família de soluções que inclui todas as possíveis soluções para a equação. Por exemplo, na equação diferencial ${dy}/{dx} = x$, a família de soluções é representada por $y = {x^2}/{2} + C$, onde C é uma constante arbitrária que pode assumir diferentes valores.

A Solução geral trata-se de uma expressão geral, que em determinados casos se pode determinar, e que represente todas as soluções possíveis da EDO. Por exemplo, na EDO de primeira ordem ${dy}/{dx} = f(x)$, a solução geral é representada por $y = F(x) + C$, em que $F(x)$ corresponde a uma antiderivada de $f(x)$ e C é a constante de integração (De Figueiredo e Neves, 1979).

Ainda dispomos da solução implícita em que algumas EDOs podem não ser resolvidas de forma explícita para y em termos de x, resultando em uma solução implícita. Nesse caso, a solução é representada implicitamente pela equação diferencial.

E por fim, a solução singular que em certas situações, uma EDO pode ter soluções singulares que não se encaixam na estrutura geral das soluções. Essas soluções podem surgir quando certas condições específicas são atendidas ou quando ocorrem singularidades na equação diferencial.

Nesse contexto, as equações das envoltórias surgem como soluções de equações diferenciais ordinárias associadas à família de curvas. No entanto, para encontrar a equação da envoltória, é necessário determinar a condição sob a qual a família de curvas possui uma solução singular.

Em relação ao significado geométrico dessas soluções, se dispomos de uma família uniparamétrica de curvas que associa a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ uma curva $f(x, y, \alpha) = 0$, temos uma aplicação real no espaço das funções: $\alpha \longmapsto f(x, y, \alpha) = 0$. Em que essa aplicação e cada curva $f(x, y, \alpha) = 0$ serão intituladas de *envolvidas* (De Figueiredo e Neves, 1979).

***Definição*:** Uma curva $y = \varphi(x)$, cujos pontos $(x, \varphi(x))$ estão sobre a família uniparamétrica $f(x, y, \alpha) = 0$ e cuja tangente em cada ponto é tangente a uma curva desta família é chamada *envoltória* (De Figueiredo e Neves, 1979).

Conforme Vilches (2009, p.29) a envoltória pode ser identificada como solução do sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 & eq.(1) \\ \frac{df}{d\lambda}(x, y, \lambda) = 0 & eq.(2) \end{cases}$$

Veja que, a equação (1) consiste na família de curvas por meio da função f , enquanto, a equação (2) corresponde a condição sob a qual a família de curvas solução dispõe de uma solução singular. Vilches (2009) ainda ressalta que pode ser que não exista a envoltória relativa a uma dada família uniparamétrica de curvas.

Exemplo 1: Com a intenção de auxiliar o entendimento acerca da definição de envoltórias, dada a família de curvas $x^2 + y^2 + 2(\alpha + 2)y + \alpha^2$, caso exista vamos encontrar sua envoltória.

A equação da envoltória advém da resolução do sistema, proposto por Vilches (2009):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(\alpha + 2)y + \alpha^2 = 0 \\ \frac{d(x^2 + y^2 + 2(\alpha + 2)y + \alpha^2)}{d\alpha} = 0 \end{cases}$$

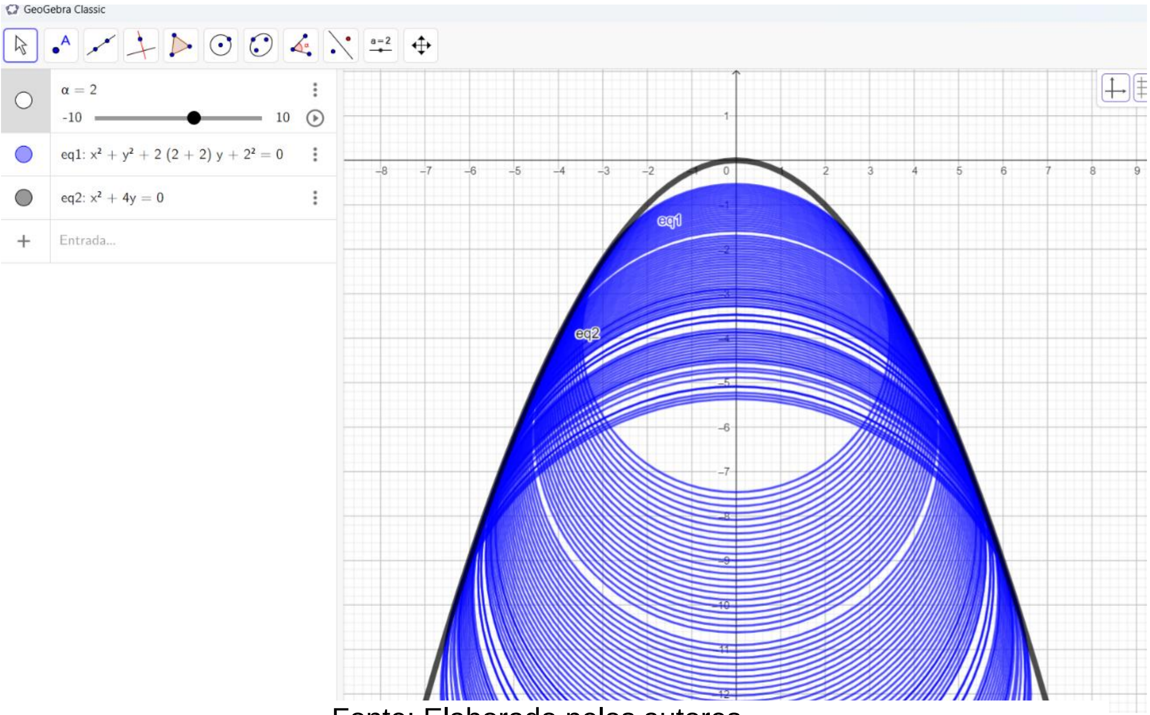
Como derivando a expressão $\frac{d(x^2+y^2+2(\alpha+2)y+\alpha^2)}{d\alpha} = \alpha + y = 0$, e substituindo α por y na expressão:

$$x^2 + y^2 + 2(\alpha + 2)y + \alpha^2 = 0.$$

Portanto temos: $x^2 + y^2 + 2(-y + 2)y + (-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4y = 0$ a equação da envoltória.

Para um melhor entendimento acerca dessa família de curvas, e do que seria a envoltória, utilizamos o GeoGebra, para a visualização de conceitos, conforme explanado na figura 1.

Figura 1: Família de curvas $x^2 + y^2 + 2(\alpha + 2)y \ + \alpha^2$, representadas na cor azul com α variando de -10 a 10, gerando uma família de círculos, e envoltória $x^2 + 4\ y$ representada na cor preta.



Fonte: Elaborado pelos autores

Observe, que por meio da figura 1, podemos constatar o significado geométrico da função envoltória, que está tangenciando a todas as curvas geradas pela expressão $x^2 + y^2 + 2(\alpha + 2)y \ + \alpha^2$, e compreender melhor do que se trata o conceito.

Encaminhamentos metodológicos

Na seção anterior, realizou-se um estudo acerca das definições, e dos conceitos correlacionados ao conceito de Envoltórias, assim se pode deduzir que o aluno necessita de um bom entendimento acerca de Cálculo de Várias Variáveis – CVV, devido aos mecanismos no algoritmo para encontrar a equação da envoltória.

Além disso, se pode constatar o viés defendido por Javaroni (2010) que o estudo do campo epistêmico EDO requer compreensão da relação entre a derivada e a taxa de variação da função de uma família de curvas, portanto torna-se necessário entender como a derivada está relacionada com a taxa de variação da função e como isso afeta as equações diferenciais.

Portanto, alunos que não dominam os conceitos de diferenciabilidade podem vir a ter dificuldades em visualizar e interpretar as equações diferenciais, e por conseguinte, as envoltórias, limitando assim sua capacidade de aplicar esse conhecimento em contextos matemáticos mais avançados.

Desse modo, torna-se relevante a abordagem dessas dificuldades epistemológicas durante o ensino das envoltórias, fornecendo uma base sólida nos conceitos de diferenciabilidade e derivada, e ajudando os alunos a relacionarem esses conceitos com as envoltórias de forma clara e significativa.

Prosseguiremos com o entendimento acerca da definição de envoltórias, agora com a seguinte a família de curvas $y = {x^2}/{2} + \alpha x + \alpha^2$, caso exista a envoltória vamos determinar sua função.

<u>Exemplo 2:</u> Seja $f(x, y, \lambda) = -y + {x^2}/{2} + \alpha x + \alpha^2$,

$$f(x, y, \lambda) = 0 \Rightarrow -y + {x^2}/{2} + \alpha x + \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow -y + \left(\alpha + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4} = 0 \quad .$$

Derivando em relação a x,

$$0 = -y' + \left(\alpha + \frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \Leftrightarrow \left(y' - \frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\,\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} \ .$$

Substituindo, $p = y'$, temos:

$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}$, derivando em relação a x,

$$p = 2\,p.p' - p + xp' + x \Leftrightarrow 2p(1 - p') = x(1 - p') \Leftrightarrow (1 - p')(x - 2p) = 0$$

Isto é, $p' = -1$ ou $p = {x}/{2}$.

Se $p' = -1$, temos $p = x + k$ originando a *solução geral* da EDO

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} \ .$$

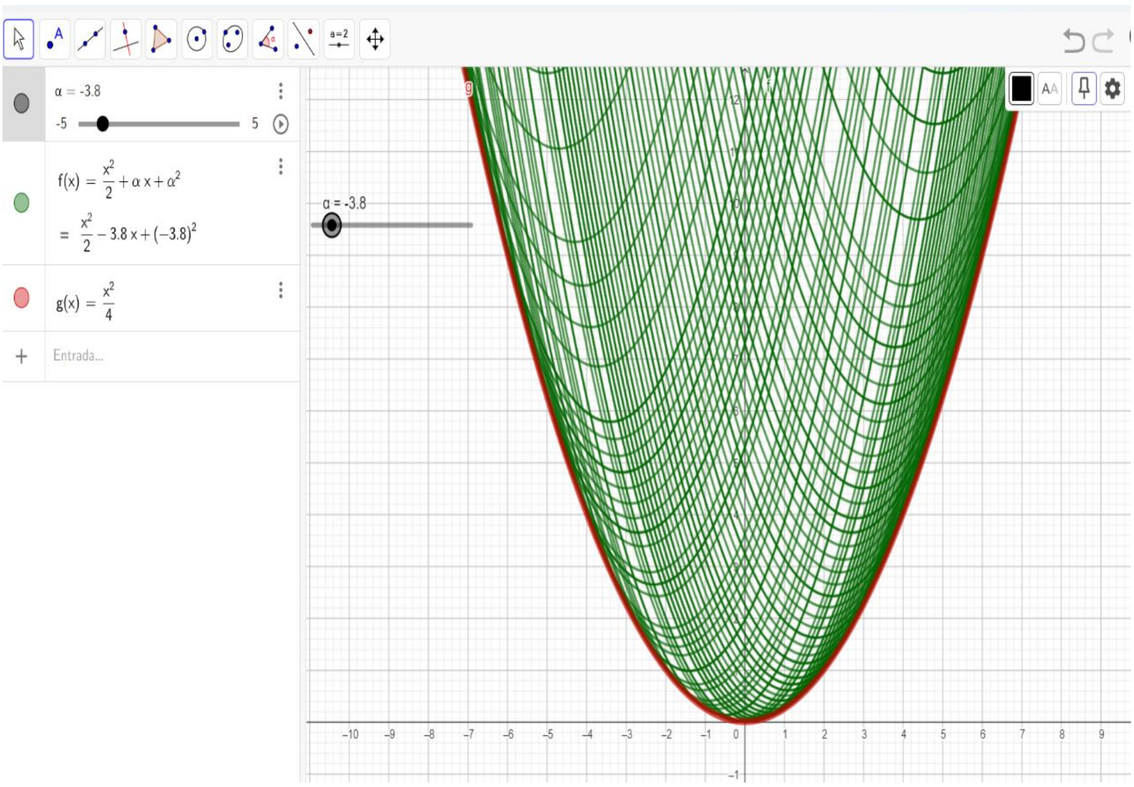
Se $p = {x}/{2}$, temos uma *solução singular* dessa EDO.

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - x.\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} = {x^2}/{4}\ .$$

Portanto, a equação $y = {x^2}/{4}$ trata-se da envoltória da família de curvas $y = {x^2}/{2} + \alpha x + \alpha^2$.

Assim, retornando ao nosso exemplo, trazemos na figura 2, uma elucidação dinâmica da família de curvas $y = {x^2}/{2} + \alpha x + \alpha^2$. em verde, e sua envoltória ${x^2}/{4}$ em vermelho.

Figura 2: Família de curvas $y = {x^2}/{2} + \alpha x + \alpha^2$, representadas na cor azul com α variando de -5 a 5, gerando uma família de parábolas, e envoltória ${x^2}/{4}$ representada na cor vermelha.



Fonte: Elaborado pelos autores

Por meio do GeoGebra, podemos compreender que a família de curvas $y = {x^2}/{2} + \alpha x + \alpha^2$ representa várias parábolas e que sua envoltória será uma parábola ${x^2}/{4}$ suficientemente maior, de modo a tangenciar pelo menos em um ponto, todas curvas geradas por essa família.

Por meio do exemplo apresentado, podemos constatar outros obstáculos epistemológicos, que possam vir a ser desenvolvidos conforme assinalados por Javaroni (2010), dentro da perspectiva da Engenharia Didática no ensino de EDO's, como a dificuldade na compreensão dos um conceito básicos: a diferenciação dos conceitos de solução geral, solução singular e suas especificidades, e a diferenciabilidade de funções de CVV. Conforme Javaroni (2010), para alguns estudantes, compreender essa ideia abstrata pode ser um desafio significativo.

De modo consoante, Rachelli e Bisognin (2017) complementam essa visão ao destacarem que alunos com dificuldades em relacionar as representações analítica e gráfica da derivada frequentemente não conseguem demonstrar compreensão do conceito de derivada e suas diversas interpretações.

E essa dificuldade na compreensão da diferenciabilidade de funções e na relação entre representações analítica e gráfica da derivada tem implicações diretas no ensino das envoltórias.

Resultados e Discussão

Por meio desse estudo, visamos investigar o ensino de um conceito de Equações Diferenciais Ordinárias, as envoltórias de uma família de curvas , alicerçado por uma pesquisa fundamentada nos princípios da Engenharia Didática.

Realizou-se a primeira etapa investigativa da ED, as análises preliminares, em que ocorreu um estudo do campo epistêmico matemático e se evidenciou as operações necessárias para o cálculo do conceito, requerendo o uso, de modo frequente, de alguns conhecimentos prévios de diferenciabilidade de funções (prevalecendo as funções polinomiais), que poderiam atuar como obstáculos epistemológicos. Ao analisar o ensino desse conteúdo matemático, também inferiu-se que o conteúdo era extremamente abstrato, e seu ensino puramente algébrico.

Por essa razão, norteados pelas investigações de Alves (2016a; 2020), optamos pela a realização pelo desenvolvimento de uma simulação no software que explanasse a visualização de alguns desses conceitos de equações diferencias.

Espera-se que a visualização dos conceitos proporcionem um desenvolvimento intuitivo desses conceitos e uma melhor compreensão acerca da diferença entre conceitos, por exemplo: a diferença entre uma solução singular e uma não singular, e do que seriam uma família de curvas, uma envoltória.

Considerações finais

Ao final dessa pesquisa, espera-se que nosso trabalho contribua de maneira significativa para o campo do ensino das EDO's . A intenção foi detalhar e sistematizar os principais elementos didáticos e metodológicos envolvidos no ensino dessa disciplina, que é fundamental para a formação em diversas áreas das ciências exatas e engenharias.

Neste trabalho foi desenvolvido um estudo acerca dos conceitos de envoltórias e a análise de uma diferente abordagem pedagógica, com o emprego de tecnologia, o Geogebra, evidenciando em sua utilização, a visualização proporcionada pelo software, a fim de facilitar a compreensão dos alunos.

A pesquisa também buscou identificar por meio da ED, as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem de EDO, assim como as lacunas existentes na formação dos professores que ensinam essa disciplina.

Portanto, ao abordar esses pontos, o trabalho espera-se que o trabalho contribua para uma compreensão mais ampla e profunda do ensino de EDO, oferecendo subsídios valiosos para educadores, pesquisadores e alunos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - (CAPES) - Brasil e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cineífico e Tecnológico- CNPQ- Brasil.

Trabalho financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia,I.P.,no âmbito dos projetos UIDB/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020) e UIDP/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020) (CIDTFF)

This work was carried out with the support of the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel - (CAPES) - Brazil and the National Council for Cineific and Technological Development - CNPQ - Brazil.

This work is financially supported by National Funds through FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., under the projects (https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020) and UIDP/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020) .

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR.2007.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia didática. **Didáctica das Matemáticas.** In: DIDÁTICA DAS MATEMÁTICAS. Brun, J. (Org.). Lisboa: Instituto Piaget. p. 193-217, 1996.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Família Flat Curve e seu envolvimento: visualização com o software Geogebra. **Conexões-Ciência e Tecnologia** , v. 8, n. 3, 2014.

ALVES, Francisco Regis Vieira; DIAS, Marlene Alves; DE LIMA, Maria Vanísia Mendonça. Sobre o ensino de integrais generalizadas (ig): um contributo da engenharia didática. **Jornal internacional de estudos em educação matemática**, v. 11, n. 2, p. 130-144, 2018.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

DE FIGUEIREDO, Djairo Guedes & NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1979.

DOUADY, Regine. Géométrie, graphiques, fonctions au collège. **Rev Eletr Investig Educ Cienc.** n.1, p.1-7, 2008.

VILCHES, Maurício. Invólucros de curva plana. **Cadernos do IME-Série Matemática**, v. 21, nº 3. p. 1-32. 2009.

JAVARONI, Sueli Liberatti.O processo de visualização no curso de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. **Revista de Ensino de Engenharia,** V. 28, N. 1.2010.